

Esimerkki Diofantoksen yhtälön ja kongruenssin käytöstä

Esimerkki. Henkilö A osti tuotetta X hintaan 15e/kpl ja tuotetta Y hintaan 11e/kpl. Yhteensä hänen ostoksensa maksoivat 137e. Montako kappaletta hän osti kumpaakin tuotetta?

Ratkaistavana on Diofantoksen yhtälö $15x + 11y = 137$. Ratkaistaan se siirtymällä kongruenssiin

$$15x \equiv 137 \pmod{11}.$$

Koska $\text{sy}(15, 11) = 1$, niin Diofantoksen yhtälö -sivun lauseen mukaan kongruenssilla on ratkaisu x , jolle pätee $0 \leq x < 11$. Yksi tapa ratkaista kongruenssi on kokeilla kaikki luvut $0, \dots, 10$. Tämä on helppo ratkaisu varsinkin pienillä luvuilla.

Toisen tavan tarjoaa edellämainitun lauseen todistus. Koska $\text{sy}(15, 11) = 1$, niin on olemassa sellaiset luvut u ja v , joilla $15u + 11v = 1$. Esimerkiksi Eukleideen algoritmia käyttäen löydetään luvut $u = 3$ ja $v = 4$, jotka toteuttavat yhtälön. Kongruenssin eräs ratkaisu on siis $x = 137u = 411$. Koska kongruenssin kaikki ratkaisut ovat keskenään kongruentteja modulo 11, niin pienin positiivinen ratkaisu on nyt $x = 4$.

Alkuperäisen tehtävän ratkaisuksi saadaan siis $x = 4$ ja $y = 7$. Huomaa, että pienin positiivinen ratkaisu ei välttämättä ole alkuperäisen tehtävän ratkaisu, tässä esimerkissä näin kuitenkin on.

Linkit:

Diofantoksen yhtälö

Eukleideen algoritmi

Kongruenssi