Vektorit

Reaaliluku vastaa pistettä suoralla, jonka yksikön pituus on määritelty. Reaalilukujen pari (x,y) vastaa pistettä tasossa, jota voidaan havainnollistaa piirtämällä *xy*-koordinaatisto. Kolmen reaaliluvun muodostama kolmikko (x,y,z) vastaa pistettä 3-ulotteisessa avaruudessa, jota voidaan vastaavasti havainnollistaa piirtämällä 3-ulotteinen *xyz*-koordinaatisto. Vaikka emme voi piirtää useampaa kuin kolmea ulottuvuutta on silti luonnollista ajatella useampiulotteisia avaruuksia ja pistettä tällaisessa avaruudessa.

Olkoot $a_1,\ldots,a_n$ reaalilukujoukon $\mathbb{R}$ alkioita. Alkioiden $a_1,\ldots,a_n$ muodostamaa järjestettyä *n-jonoa* eli *n-tuplaa*

$$\mathbf{v} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

sanotaan *vektoriksi*. Reaalilukuja $a_1,\ldots,a_n$ sanotaan vektorin **v** *koordinaateiksi*.

Reaalilukujen muodostama vektori $(a_1,\ldots,a_n)$ vastaa siis pistettä n-ulotteisessa avaruudessa.

Kaikkien n-ulotteisten vektorien joukosta käytetään merkintää $\mathbb{R}^n$, eli

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1,\ldots,a_n) \mid a_i \in \mathbb{R},\ i = 1,\ldots,n\}.$$

Vektorien teoriassa reaalilukuja kutsutaan *skalaareiksi*. Nollavektorista $(0,0,\ldots,0)$ käytetään merkintää **0**. Vektoreille määritellään luonnollisella tavalla *yhteenlasku* ja *skalaarilla kertominen*.

Määritelmä. Olkoot $(a_1,\ldots,a_n),\ (b_1,\ldots,b_n) \in \mathbb{R}^n$ ja $k \in \mathbb{R}$.

- Yhteenlasku: $(a_1,\ldots,a_n)+(b_1,\ldots,b_n) = (a_1+b_1,\ldots,a_n+b_n)$.
- Skalaarilla kertominen: $k(a_1,\ldots,a_n) = (ka_1,\ldots,ka_n)$.

Huomataan heti, että edellä määritellyt laskutoimitukset toteuttavat seuraavat säännöt ($\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $k \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}+\mathbf{v} &= \mathbf{v}+\mathbf{u} && \text{(vaihdanta- eli kommutatiivilaki)}\\
(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} &= \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) && \text{(liitäntä- eli assosiatiivilaki)}\\
k(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= k\mathbf{u}+k\mathbf{v} && \text{(osittelu- eli distributiivilaki).}
\end{aligned}$$

Määritelmä. Olkoon $\mathbf{v} = (a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n$. Vektorin **v** *pituus* $|\mathbf{v}|$ on reaaliluku $\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$.

Vektoria, jonka pituus on yksi, sanotaan *yksikkövektoriksi*. Jokainen vektori $\mathbf{v} = (a_1,\ldots,a_n)$ voidaan esittää yksikkövektorien $\mathbf{e}_1 = (1,0,\ldots,0), \mathbf{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0), \ldots, \mathbf{e}_n = (0,\ldots,0,1)$ avulla *komponenttimuodossa*

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n.$$

Linkit:
Vektorien sisätulo