Vektorien sisätulo

Määritelmä. Vektorien $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ ja $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ *sisätulo* $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ on reaaliluku, joka saadaan laskemalla

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

Sisätulosta käytetään myös merkintää $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ja nimitystä *pistetulo* sekä *skalaaritulo*.

Sisätulo toteuttaa seuraavat ominaisuudet. Olkoon $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $a \in \mathbb{R}$.

(i) Jos $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, niin $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$, muuten $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0$.

(ii) $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$,

(iii) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{w}) + (\mathbf{v}, \mathbf{w})$,

(iv) $(a\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Todistetaan edellä oleva sisätulon ominaisuus (i), muut kohdat seuraavat helposti reaalilukujen ominaisuuksien ja sisätulon määritelmän perusteella. Olkoon $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$. Jos vektorin $\mathbf{u}$ jokin koordinaatti $u_i \neq 0$, niin sisätulon $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = u_1^2 + \cdots + u_n^2$ termi $u_i^2 \neq 0$, lisäksi $u_i^2 > 0$. Täten sisätulo on positiivinen ja nolla vain jos $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Linkit:
Vektorit