Esimerkkejä vektoriavaruuksista

Esimerkki. Määritellään joukossa

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1,\ldots,x_n) \mid x_1 \in \mathbb{R},\ldots,x_n \in \mathbb{R}\}$$

summa ja skalaaritulo seuraavasti:

$$\begin{aligned}(x_1,\ldots,x_1)+(y_2,\ldots,y_n) &= (x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)\\ a(x_1,\ldots,x_n) &= (ax_1,\ldots,ax_n).\end{aligned}$$

Tarkistamalla vektoriavaruuden kaikkien postulaattien V1-V8 toteutuvuus huomataan, että kolmikko $(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$ on vektoriavaruus. Tämän vektoriavaruuden nollavektori on $\theta = \mathbf{0} = (0,\ldots,0)$ ja vektorin $(x_1,\ldots,x_n)$ vastavektori on $(-x_1,\ldots,-x_n)$.

Esimerkki. Kaikkien reaalifunktioiden joukko on

$$F(\mathbb{R}) = \{f \mid f \text{ on funktio } \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}.$$

Kuten kaikissa funktiojoukoissa on tässäkin funktioiden yhtäsuuruus ymmärrettävä seuraavasti:

$$f = g \Leftrightarrow f(x) = g(x)\ \forall x \text{ (tässä siis } \forall x \in \mathbb{R}).$$

Kolmikko $(F(\mathbb{R}),+,\cdot)$ on vektoriavaruus, kun määritellään

$$\begin{aligned} f+g: \quad (f+g)(x) &= f(x)+g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},\\ af: \quad (af)(x) &= a\cdot f(x) \quad \forall a,x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Tällöin $f+g \in F(\mathbb{R})$ ja $af \in F(\mathbb{R})$. Kolmikko todetaan vektoriavaruudeksi käymällä läpi vektoriavaruuden postulaatit. Esimerkiksi postulaatti V1 seuraa siitä, että $f(x)+g(x) = g(x)+f(x)$ kaikilla reaaliluvuilla x. Vektoriavaruuden nolla-alkio on $f_0(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, sillä kaikilla $f \in F(\mathbb{R})$ on $(f+f_0)(x) = f(x)+f_0(x) = f(x)+0 = f(x)$. Vektoriavaruuden funktion f vasta-alkio on $-f : (-f)(x) = -f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Nimittäin kaikilla $f \in F(\mathbb{R})$ on $(f+(-f))(x) = f(x)+(-f(x)) = 0$.

Linkit:
Vektoriavaruus