Vektoriavaruuden ominaisuuksia

Määritellään vektorien X ja Y *erotus*:

$$X - Y = X + (-Y).$$

Vektoriyhtälöstä $X + Y = Z$ voidaan ratkaista X lisäämällä vektorin Y vastavektori $-Y$ molemmille puolille, siis

$$(*) \qquad \text{jos } X + Y = Z, \text{ niin } X = Z - Y.$$

Oletetaan jatkossa, että kolmikko $(V, +, \cdot)$ on vektoriavaruus.

Lause. Oletetaan, että $a \in \mathbb{R}$ ja $X \in V$. Jos $a = 0$ tai $X = \theta$, niin $aX = \theta$.

Todistus. Oletetaan ensin, että $a = 0$. Koska $0X + 0X = (0+0)X = 0X$ niin päättelyn (*) perusteella $0X = 0X - 0X = \theta$. Jos $X = \theta$, saadaan samoin $a\theta + a\theta = a(\theta + \theta) = a\theta$ ja käyttämällä päättelyä (*) nähdään, että $a\theta = \theta$. □

Lause. Olkoot $a \in \mathbb{R}$ ja $X \in V$. Jos $a \neq 0$ ja $aX = \theta$, niin $X = \theta$.

Todistus. Oletetaan, että $aX = \theta$ ja $a \neq 0$. Silloin

$$X = 1 \cdot X = (\frac{1}{a} \cdot a)X = \frac{1}{a}(aX) = \frac{1}{a}\theta = \theta,$$

missä viimeinen yhtäsuuruus seuraa edellisestä lauseesta. □

Lause. Jos $X \in V$ niin $(-1) \cdot X$ on alkion X vasta-alkio.

Todistus. Pitää osoittaa, että $X + (-1) \cdot X = \theta$. Saadaan

$$\begin{aligned} X + (-1) \cdot X &= 1 \cdot X + (-1) \cdot X && \text{postulaatin V8 mukaan} \\ &= (1 + (-1)) \cdot X && \text{postulaatin V6 mukaan} \\ &= 0 \cdot X && \\ &= \theta && \text{sivun ensimmäisen lauseen mukaan.} \end{aligned}$$

□

Edellisten lauseiden avulla saadaan kaavat $-(X - Y) = Y - X$ ja $a(X - Y) = aX - aY$ kaikilla $X, Y \in V$ ja $a \in \mathbb{R}$. Liitäntälain V2 perusteella kolmen vektorin $X, Y, Z \in V$ summa voidaan kirjoittaa muodossa $X + Y + Z$. Sama pätee yleisestikin useamman vektorin summaan. Yleisesti vektoriavaruudessa voidaan muodostaa lauseke

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n \qquad \forall X_1, \ldots, X_n \in V, \ \forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R},$$

joka siis merkitsee erästä (yksikäsitteistä) vektoria. Tätä sanotaan vektorien $X_1, \ldots, X_n$ *lineaarikombinaatioksi*.

Linkit:
Vektoriavaruus