Aliavaruus

Määritelmä. Jos $U \subseteq V$ ja U on vektoriavaruus vektoriavaruudessa $(V,+,\cdot)$ määriteltyjen laskutoimitusten $+$ ja $\cdot$ suhteen, sanotaan kolmikkoa $(U,+,\cdot)$ vektoriavaruuden $(V,+,\cdot)$ *aliavaruudeksi*.

Triviaalisti $(V,+,\cdot)$ on itse itsensä aliavaruus, muita sen aliavaruuksia sanotaan *aidoiksi*.

Huomaa, että vektoriavaruuden $(V,+,\cdot)$ nollavektori θ on myös sen aliavaruuden $(U,+,\cdot)$ nollavektori. Jos aliavaruuden $(U,+,\cdot)$ nollavektori olisi θ', niin silloin vektoriavaruudessa V voitaisiin laskea $\theta' = \theta' + \theta'$. Lisäämällä tässä yhtälössä puolittain nollavektorin θ' vastavektori vektoriavaruudessa V saadaan $\theta = \theta'$.

Koska aliavaruus $(U,+,\cdot)$ on vektoriavaruus, joukko U sisältää alkioidensa summat ja skalaarimonikerrat. Tällöin sanotaan, että U on *suljettu* vektoriavaruuden laskutoimitusten suhteen. Seuraavassa lauseessa määritellään nämä ehdot tarkasti ja todetaan, että ne ovat riittävät ehdot sille, että vektoriavaruuden osajoukko on aliavaruus.

Lause. [Aliavaruuskriteeri] Vektoriavaruuden $(V,+,\cdot)$ joukon V epätyhjä osajoukko U muodostaa aliavaruuden $(U,+,\cdot)$ jos ja vain jos U toteuttaa ehdot:

(A) jos $X,Y \in U$, niin $X+Y \in U$,

(B) jos $a \in \mathbb{R}$ ja $X \in U$, niin $aX \in U$.

Todistus. Kuten lauseen edellä todettiin on selvää, että jos $(U,+,\cdot)$ on aliavaruus, niin ehdot (A) ja (B) toteutuvat. Oletetaan nyt, että vektoriavaruuden $(V,+,\cdot)$ joukon V osajoukolle U ehdot (A) ja (B) toteutuvat, ja näytetään, että tästä seuraa se, että $(U,+,\cdot)$ on aliavaruus. Pitää siis näyttää, että $(U,+,\cdot)$ on vektoriavaruus. Koska U on joukon V osajoukko, sen alkiot toteuttavat triviaalisti ehdot V1, V2 ja V5-V8, koska joukon V alkiot toteuttavat ne. Koska kaikilla $X \in U \subseteq V$ on sivun Vektoriavaruuden ominaisuuksia ensimmäisen lauseen mukaan $0X = \theta$, nähdään valitsemalla ehdossa (B) luvuksi $a = 0$, että $\theta \in U$. Samoin valitsemalla $a = -1$ nähdään, että $-X \in U$ kaikilla $X \in U$. Nyt postulaattien $V3$ ja $V4$ yhtälöt $X + \theta = X$ ja $X + (-X) = \theta$ pätevät joukossa U, koska ne pätevät joukossa V.$\square$

Ehdot (A) ja (B) ovat yhdessä ekvivalentit seuraavan ehdon kanssa:

$$\text{(AB)} \qquad \text{jos } a,b \in \mathbb{R} \text{ ja } X,Y \in U, \text{ niin } aX + bY \in U.$$

Nollavektori muodostaa yksinään aliavaruuden $(\{\theta\},+,\cdot)$. Tämä ja vektoriavaruus itse ovat *triviaalit aliavaruudet*.

Linkit:
Vektoriavaruus
Vektoriavaruuden ominaisuuksia
Esimerkkejä aliavaruuksista
Esimerkkejä aliavaruuksista 2
Aliavaruuden muodostaminen