Esimerkkejä aliavaruuksista

Esimerkki. Merkitään

$$C(\mathbb{R}) = \{f \mid f \text{ on jatkuva funktio } \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$$

ja määritellään funktioiden summa ja skaalarimonikerta kuten funktiojoukossa $F(\mathbb{R})$ (katso Esimerkkejä vektoriavaruudesta):

$$\begin{array}{rrcll} f+g: & (f+g)(x) & = & f(x)+g(x) & \forall x \in \mathbb{R}, \\ af: & (af)(x) & = & a \cdot f(x) & \forall a, x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Näin voidaan tehdä, koska jatkuvien funktioiden summa on jatkuva, samoin jatkuva funktio kerrottuna skalaarilla on jatkuva. Aliavaruuskriteerin perusteella $(C(\mathbb{R}), +, \cdot)$ on vektoriavaruuden $(F(\mathbb{R}), +, \cdot)$ aliavaruus.

Esimerkki. Tutkitaan joukon $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ muodostaman vektoriavaruuden $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ aliavaruuksia. Olkoon $\mathbf{u}$ jokin avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektori. Näyttämällä aliavaruuskriteerin ehdon (AB) voimassaolo osoitetaan, että vektorin $\mathbf{u}$ *virittämä* avaruus

$$L(\mathbf{u}) = \{c\mathbf{u} \mid c \in \mathbb{R}\}$$

muodostaa vektoriavaruuden $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ aliavaruuden $(L(\mathbf{u}), +, \cdot)$. Selvästi joukko $L(\mathbf{u})$ on epätyhjä. Olkoon $a, b \in \mathbb{R}$ ja $c_1\mathbf{u}$, $c_2\mathbf{u} \in L(\mathbf{u})$. Silloin

$$a(c_1\mathbf{u}) + b(c_2\mathbf{u}) = (ac_1 + bc_2)\mathbf{u} \in L(\mathbf{u}),$$

joten $(L(\mathbf{u}), +, \cdot)$ on vektoriavaruuden $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ aliavaruus kaikilla $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$. Nämä aliavaruudet vastaavat tasossa origon kautta kulkevia suoria.

Vastaavasti vektoriavaruuden $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ aliavaruuksia ovat origon kautta kulkevat suorat ja tasot. Sivulla Aliavaruuden dimensio huomataan, ettei vektoriavaruudella $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ muita epätriviaaleja aliavaruuksia olekaan.

Linkit:

Aliavaruus

Esimerkkejä aliavaruuksista 2

Esimerkkejä vektoriavaruuksista

Aliavaruuden dimensio