Lineaarinen riippuvuus

Olkoon $(V,+,\cdot)$ vektoriavaruus ja θ sen nolla-alkio. Olkoot lisäksi $X_1,\ldots,X_m$ joukon V m vektoria. Jos joillakin $c_1,\ldots,c_m \in \mathbb{R}$ on

$$c_1X_1+c_2X_2+\cdots+c_mX_m=\theta,$$

sanotaan, että vektorit $X_1,\ldots,X_m$ toteuttavat *lineaarisen relaation.* Jokainen vektorijoukko toteuttaa *triviaalin lineaarisen relaation*, nimittäin sen, jossa $c_1=c_2=\ldots=c_m=0$. Muita lineaarisia relaatioita sanotaan *epätriviaaleiksi*.

Määritelmä. Jos vektorit $X_1,\ldots,X_m$ toteuttavat ainakin yhden epätriviaalin relaation, sanotaan, että nämä vektorit ovat *lineaarisesti riippuvia*. Muussa tapauksessa näitä vektoreita sanotaan *lineaarisesti riippumattomiksi*.

Jos vektorit $X_1,\ldots,X_m$ ovat lineaarisesti riippuvia (tai riippumattomia), sanotaan myös, että joukko $\{X_1,\ldots,X_m\}$ on *lineaarisesti riippuva* (tai *riippumaton*).

Yhden vektorin joukko $\{X\}$ on lineaarisesti riippuva, jos $aX=\theta$ jollakin nollasta eroavalla reaaliluvulla a. Vektoriavaruuden ominaisuuksia -sivun toisen lauseen mukaan on tällöin vektori $X=\theta$. Siis $\{\theta\}$ on lineaarisesti riippuva ja kaikille $X\neq\theta$ joukko $\{X\}$ on lineaarisesti riippumaton.

Lause. Vektoriavaruuden $(V,+,\cdot)$ joukon V vähintään kahden vektorin äärellinen osajoukko on lineaarisesti riippuva jos ja vain jos jokin joukon vektori on joukon muiden vektorien lineaarikombinaatio.

Todistus. Oletetaan ensin, että joukko $\{X_1,\ldots,X_m\}\subseteq V$ on lineaarisesti riippuva. Silloin on olemassa sellaiset kertoimet $c_1,\ldots,c_m$, joista ainakin yksi on nollasta eroava, että

$$c_1X_1+\cdots+c_mX_m=\theta.$$

Voidaan olettaa, että $c_i\neq 0$. Silloin saadaan

$$X_i=-(c_1/c_i)X_1-\cdots-(c_{i-1}/c_i)X_{i-1}-(c_{i+1}/c_i)X_{i+1}-\cdots-(c_m/c_i)X_m,$$

joten X_i voidaan esittää muiden vektorien lineaarikombinaationa.

Oletetaan kääntäen, että $X_i=b_1X_1+\cdots+b_{i-1}X_{i-1}+b_{i+1}X_{i+1}+\cdots+b_mX_m$, joillekin luvuille $b_1,\ldots,b_{i-1},b_{i+1},\ldots,b_m\in\mathbb{R}$. Silloin

$$X_i-b_1X_1-\cdots-b_{i-1}X_{i-1}-b_{i+1}X_{i+1}-\cdots-b_mX_m=\theta.$$

Koska vektorin X_i kerroin on nollasta eroava, vektorit $X_1,\ldots,X_m$ toteuttavat epätriviaalin lineaarisen relaation ja ovat siis lineaarisesti riippuvia. □

Edellä todistetusta lauseesta seuraa, että kahden vektorin joukko $\{X_1,X_2\}$ on lineaarisesti riippuva, jos ja vain jos toinen vektoreista on toisen skalaarimonikerta. Vektoriavaruudessa $\mathbb{R}^2$ tämä tarkoittaa sitä, että kaksi vektoria $\mathbf{u}=(u_1,u_2)$ ja $\mathbf{v}=(v_1,v_2)$ ovat lineaarisesti riippuvia jos ja vain jos ne ovat samalla origon kautta kulkevalla suoralla.

Linkit:
Vektoriavaruuden ominaisuuksia (lineaarikombinaation määritelmä)