Aliavaruuden muodostaminen

Vektoriavaruudesta $(V,+,\cdot)$ voidaan muodostaa aliavaruuksia valitsemalla jotkin joukon V vektorit $X_1,\ldots,X_n$ ja muodostamalla näiden kaikki mahdolliset lineaarikombinaatiot. Saadaan siis joukko

$$L(X_1,\ldots,X_n)=\{a_1X_1+\cdots+a_nX_n \mid a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}\}.$$

Kolmikko $(L(X_1,\ldots,X_n),+,\cdot)$ on vektoriavaruuden $(V,+,\cdot)$ aliavaruus: Joukko $L(X_1,\ldots,X_n)$ on selvästi epätyhjä. Jos X ja Y ovat vektorien $X_1,\ldots,X_n$ lineaarikombinaatioita, niin samoin on myös $aX+bY$ kaikilla $a,b\in\mathbb{R}$, joten $aX+bY\in L(X_1,\ldots,X_n)$. Aliavaruutta $(L(X_1,\ldots,X_n),+,\cdot)$ sanotaan vektoreiden $X_1,\ldots,X_n$ *virittämäksi* tai *generoimaksi*. Jos $L(X_1,\ldots,X_n)=V$ sanotaan, että vektorit $X_1,\ldots,X_n$ *virittävät* tai *generoivat* vektoriavaruuden $(V,+,\cdot)$.

Tunnetuista aliavaruuksista voidaan muodostaa uusia aliavaruuksia myös seuraavan lauseen avulla.

Lause. Jos $(U_1,+,\cdot)$ ja $(U_2,+,\cdot)$ ovat vektoriavaruuden $(V,+,\cdot)$ aliavaruuksia, niin samoin on niiden leikkaus $(U_1\cap U_2,+,\cdot)$. Sama pätee myös useamman (jopa äärettömän monen) aliavaruuden leikkaukseen.

Todistus. Olkoon θ vektoriavaruuden $(V,+,\cdot)$ nollavektori. Koska $\theta\in U_1$ ja $\theta\in U_2$, niin $\theta\in U_1\cap U_2$. Leikkaus on siis epätyhjä.

Jos $a,b\in\mathbb{R}$ ja $X,Y\in U_1\cap U_2$, silloin $aX+bY\in U_1$ ja $aX+bY\in U_2$, joten $aX+bY\in U_1\cap U_2$. Aliavaruuskriteerin (AB) nojalla $(U_1\cap U_2,+,\cdot)$ on aliavaruus.

Päättely voidaan yleistää useamman aliavaruuden leikkaukseen. □

Linkit:
Aliavaruus

Vektoriavaruuden ominaisuuksia