

Lineaariset yhtälöt ja yhtälöryhmät

Lineaarinen yhtälö on yhtälö, joka on muotoa

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

missä a_1, a_2, \dots, a_n ja b ovat vakioita ja symboleja x_1, x_2, \dots, x_n sanotaan *muuttujiksi*. Linearisessa yhtälössä muuttujat ovat siis ensimmäistä astetta eli niiden potenssi on 1 (termi x^2 on toista astetta ja termi x^3 kolmatta astetta ja niin edelleen). Luku a_i on muuttujan x_i *kerroin*. Yhtälön *ratkaisu* on vektori (c_1, c_2, \dots, c_n) , joka toteuttaa yhtälön, toisin sanoen $a_1c_1 + a_2c_2 + \dots + a_nc_n = b$.

Useasta lineaarisesta yhtälöstä muodostuu lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisu on vektori (c_1, c_2, \dots, c_n) , joka toteuttaa yhtälöryhmän kaikki yhtälöt.

Lineaarinen yhtälöryhmä voidaan ratkaista koulukursseilla opitulla tavalla muuntamalla yhtälöryhmää ekvivalenttiin muotoon ja samalla siirtymällä kohti yhtälöryhmää, josta ratkaisut löydetään helposti. Tavallisia ekvivalentteja muunnoksia ovat yhtälön kertominen puolittain jollain nollasta eroavalla vakiolla ja yhtälön lisääminen puolittain toiseen yhtälöön.

Lineaarista yhtälöryhmää

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

jossa kaikkien yhtälöiden oikeat puolet ovat nollia, sanotaan *homogeeniseksi*. Jokaisella homogeenisella yhtälöryhmällä on ainakin yksi ratkaisu nimittäin $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Tätä ratkaisua sanotaan *triviaaliksi*. Muita homogeenisen yhtälöryhmän ratkaisuja sanotaan *epät triviaaleiksi*.

Determinanttien teorian yhteydessä osoitetaan, että jos homogeenisessa yhtälöryhmässä on enemmän muuttujia kuin yhtälöitä ($n > m$), niin kyseisellä yhtälöryhmällä on aina epät triviaali ratkaisu.

Linkit:

Lineaarinen riippuvuus ja homogeeniset yhtälöryhmät