Matriisitulon ominaisuuksia

Lause. (Assosiatiivilaki) Olkoot $A=(a_{ij})_{n\times m}$, $B=(b_{ij})_{m\times p}$ ja $C=(c_{ij})_{p\times q}$ matriiseja. Silloin

$$A(BC)=(AB)C.$$

Todistus. Matriisin AB paikassa (i,j) $(1\le i\le n,\ 1\le j\le p)$ on alkio $\sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj}$. Täten matriisin $(AB)C$ paikassa (i,l) $(1\le i\le n,\ 1\le l\le q)$ on alkio

$$\sum_{j=1}^p(\sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj})c_{jl}=\sum_{j=1}^p\sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj}c_{jl}.$$

Toisaalta matriisin BC paikassa (k,l) $(1\le k\le m,\ 1\le l\le q)$ on alkio $\sum_{j=1}^p b_{kj}c_{jl}$ ja täten matriisin $A(BC)$ paikassa (i,l) $(1\le i\le n,\ 1\le l\le q)$ on alkio

$$\sum_{k=1}^m a_{ik}(\sum_{j=1}^p b_{kj}c_{jl})=\sum_{k=1}^m\sum_{j=1}^p a_{ik}b_{kj}c_{jl}.$$

Koska summauksen järjestyksen vaihto ei muuta summaa, saadaan väite. □

Lause. (Distributiivilait)

$$A(B+C)=AB+AC,\qquad (A+B)C=AC+BC.$$

Todistus. Todistetaan ensimmäinen distributiivilaki, toinen voidaan todistaa samoin. Merkitään $A=(a_{ij})_{n\times m}$, $B=(b_{ij})_{m\times p}$ ja $C=(c_{ij})_{m\times p}$. Silloin $B+C=(b_{kj}+c_{kj})_{m\times p}$. Täten matriisin $A(B+C)$ paikassa (i,j) $(1\le i\le n,\ 1\le j\le p)$ on alkio

$$\sum_{k=1}^m a_{ik}(b_{kj}+c_{kj}).$$

Toisaalta $AB=\left(\sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj}\right)_{n\times p}$ ja $AC=\left(\sum_{k=1}^m a_{ik}c_{kj}\right)_{n\times p}$, joten matriisin $AB+AC$ paikassa (i,j) $(1\le i\le n,\ 1\le j\le p)$ on alkio

$$\sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=1}^m a_{ik}c_{kj}.$$

Koska $\sum_{k=1}^m a_{ik}(b_{kj}+c_{kj})=\sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=1}^m a_{ik}c_{kj}$, saadaan väite. □

Linkit:
Matriisien algebraa

Matriisitulo