Lisää matriisitulosta

Lause. (Skalaarin siirto) Jos $A = (a_{ij})_{n\times m}$ ja $B = (b_{ij})_{m\times p}$ ovat matriiseja ja r on jokin reaaliluku, niin

$$r(AB) = (rA)B = A(rB).$$

Todistus. Kirjoitetaan

$$r(AB) = r\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk}\right)_{n\times p} = \left(r\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk}\right)_{n\times p} = \left(\sum_{j=1}^{m} (ra_{ij})b_{jk}\right)_{n\times p} = \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(rb_{jk})\right)_{n\times p}.$$

Tässä toiseksi viimeinen matriisi on $(rA)B$ ja viimeinen on $A(rB)$. $\square$

Seuraava lause on helppo nähdä todeksi.

Lause. Kaikilla matriiseilla $A = (a_{ij})_{n\times m}$ on

$$AI_m = I_nA = A,$$
$$A\mathbf{0} = \mathbf{0}A = \mathbf{0}.$$

Assosiatiivilain nojalla voidaan kolmen matriisin tulo kirjoittaa ilman sulkeita ABC ja yleisemmin monen matriisin tulo voidaan kirjoittaa $A_1A_2\cdots A_k$. Jos A on $(n\times n)$-neliömatriisi, sen potenssi määritellään luonnollisella tavalla:

$$A^0 = I_n, \qquad A^k = A\cdots A \quad (k \text{ tekijää}) \quad \forall\, k \geq 1.$$

Silloin

$$A^k + A^h = A^{k+h}, \qquad (A^k)^h = A^{kh} \qquad \forall\, k,h \geq 0.$$

Huomaa, että $(AB)^k = ABAB\cdots AB$, joka on yleensä eri matriisi kuin A^kB^k, kun $k \geq 2$.

Lause. $(AB)^T = B^TA^T$.

Todistus. Merkitään $A = (a_{ij})_{n\times m}$ ja $B = (b_{ij})_{m\times p}$. Tällöin

$$A^T = (a'_{ij})_{m\times n} \qquad B^T = (b'_{ij})_{p\times m}, \qquad \text{missä } a'_{ij} = a_{ji} \text{ ja } b'_{ij} = b_{ji}.$$

Tulo B^TA^T on siis määritelty ja $B^TA^T = (v_{ij})_{p\times n}$, missä

$$v_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b'_{ik}a'_{kj} = \sum_{k=1}^{m} b_{ki}a_{jk} = \sum_{k=1}^{m} a_{jk}b_{ki}.$$

Alkio v_{ij} on siis matriisin AB paikassa (j,i) oleva alkio. $\square$

Käyttämällä toistuvasti edellistä lausetta saadaan:

$$(A_1A_2\cdots A_k)^T = A_k^TA_{k-1}^T\cdots A_1^T.$$

Linkit:
Matriisitulo
Yksinkertaisia matriiseja
Matriisitulon ominaisuuksia