Determinantti

Määritelmä. Olkoon A (2×2)-matriisi ja olkoon B (3×3)-matriisi:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Matriisin A *determinantti* on

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb.$$

Matriisin B determinantti on

$$\det(B) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg.$$

Determinantti voidaan määritellä kaikille neliömatriiseille. Yleistä määrittelyä varten esitetään ensin *permutaation* käsite ja joitakin siihen liittyviä käsitteitä.

Määritelmä. Jonoa $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ sanotaan lukujen $1, 2, \ldots, n$ *permutaatioksi*, jos jonossa ovat kaikki luvut $1, 2, \ldots, n$ jossain järjestyksessä.

Permutaatiossa $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ sanotaan paria j_h, j_k *käännetyksi*, jos $h < k$ ja $j_h > j_k$. Käännettyä paria voidaan sanoa myös *inversioksi*.

Permutaatiota sanotaan *parilliseksi* tai *parittomaksi* sen mukaan, onko permutaatiossa parillinen vai pariton määrä käännettyjä pareja. Permutaation *merkki* on

$$\operatorname{sign}(j_1, j_2, \ldots, j_n) = \begin{cases} +1, & \text{jos } (j_1, j_2, \ldots j_n) \text{ on parillinen,} \\ -1, & \text{jos } (j_1, j_2, \ldots j_n) \text{ on pariton.} \end{cases}$$

Nyt voidaan määritellä yleisen $(n \times n)$-matriisin $A = (a_{ij})$ determinantti.

Määritelmä.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum \operatorname{sign}(j_1, j_2, \ldots, j_n) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

missä summaan otetaan kaikki lukujen $1, 2, \ldots, n$ permutaatiot $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$.

Lukujen $1, 2, \ldots, n$ permutaatioita on $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ kappaletta. Täten determinantin yleisessä määrittelyssä yhteenlaskettavia on $n!$ kappaletta. Luku $n!$ kasvaa nopeasti luvun n kasvaessa ja siksi määritelmän menetelmä determinantin laskemiseksi suurelle neliömatriisille on tehotonta. Determinantin laskemista voidaan kuitenkin helpottaa kuten käy ilmi sivulta Determinantin perusominaisuuksia.

Linkit:
Matriisi

Determinantin perusominaisuuksia