Determinantin rivikehitelmät

Lause. Matriisin $A = (a_{ij})_{n\times n}$ determinantilla on seuraavat lausekkeet, kun $1 \le i \le n$ ja $1 \le j \le n$:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}C_{ik} \qquad \det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}C_{kj}.$$

Ensimmäistä näistä kehitelmistä sanotaan *determinantin rivikehitelmäksi i :nnen vaakarivin mukaan* ja jälkimmäistä *determinantin rivikehitelmäksi j :nnen pystyrivin mukaan.*

Todistus. Sivun Transponoidun matriisin determinantti lauseen mukaan riittää todistaa vain vaakarivikehitelmän olemassaolo.

Determinantti määriteltiin summalausekkeella

$$\sum \operatorname{sign}(j_1, j_2, \ldots, j_n) a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

missä summaan otetaan kaikki lukujen $1,2,\ldots,n$ permutaatiot $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$.

Ajatellaan nyt tässä summalausekkeessa kootuksi yhteen ne summan termit, jotka sisältävät kertoimen a_{i1}, samoin ne, jotka sisältävät kertoimen a_{i2} ja niin edelleen. Näiden yhteenlaskettavien erottaminen on mahdollista sillä missään termissä $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ ei esiinny kahta luvuista $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$. Ottamalla kukin luvuista $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ osasummissa yhteiseksi tekijäksi, saadaan: $\det A = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \ldots + a_{in}c_{in}$. Vielä pitää osoittaa, että $c_{ik} = C_{ik}$ kaikilla $1 \le k \le n$.

Osoitetaan ensin, että $c_{11} = C_{11}$. Kokoamalla matriisin A determinantin lausekkeessa yhteen ne termit, jotka sisältävät kertoimen a_{11}, saadaan

$$c_{11} = \sum \operatorname{sign}(1, j_2, \ldots, j_n) a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

missä summa lasketaan yli lukujen $2,\ldots,n$ kaikkien permutaatioiden $(j_2, \ldots, j_n)$. Koska mikään pareista $1, j_h$ ei ole käännetty, on $\operatorname{sign}(1, j_2, \ldots, j_n) = \operatorname{sign}(j_2, \ldots, j_n)$. Täten $c_{11} = \det A_{11} = (-1)^{1+1} \det A_{11} = C_{11}$.

Tutkitaan seuraavaksi mielivaltaisen alkion a_{ik} kerrointa c_{ik}. Siirretään i :s vaakarivi ensimmäiseksi vaakariviksi tekemällä $i-1$ peräkkäisten vaakarivien vaihtoa. Näin saadussa matriisissa siirretään k :s pystyrivi ensimmäiseksi tekemällä $k-1$ vierekkäisten pystyrivien vaihtoa. Näin on saatu alkio a_{ik} matriisin yläkulmaan alkion a_{11} paikalle. Käytetään merkintää A' muokatusta matriisista. Lukuunottamatta ensimmäistä vaakariviä ja pystyriviä on kaikkien rivien ja sarakkeiden keskinäinen järjestys säilynyt matriisissa A' samana kuin alkuperäisessä matriisissa A. Täten matriisissa A' alkion a_{ik} (joka on siis matriisin yläkulmassa) alideterminantti on edellä todistetun nojalla sama kuin matriisissa A. Siis determinantin A' lausekkeessa (kun tälle determinantin lausekkeelle tehdään samanlainen rivikehitelmä kuin matriisille A) on alkion a_{ik} kertoimena $\det A_{ik}$. Toisaalta Determinantin perusominaisuuden (D4) mukaan on matriisien A ja A' determinanttien lausekkeissa samat termit lukuunottamatta etumerkkejä ja tulon tekijöiden järjestystä. Siis matriisin A determinantin rivikehitelmässä on termi $\pm a_{ik} \det A_{ik}$, joten $c_{ik} = \pm \det A_{ik}$. Edelleen determinantin ominaisuuden (D4) mukaan saadaan etumerkki lasketuksi laskemalla rivivaihtojen lukumäärä. Etumerkiksi saadaan $(-1)^{i-1+k-1} = (-1)^{i+k}$. Siis $c_{ik} = (-1)^{i+k} \det A_{ik} = C_{ik}$. $\square$

Determinantin vaakarivikehitelmässä on siis i :nnen vaakarivin alkiot kerrottu komplementeillaan ja laskettu yhteen.

Linkit:

Alideterminantti ja komplementti

Determinantin perusominaisuuksia

Transponoidun matriisin determinantti