Cramerin sääntö

Jos yhtälöryhmän

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

kertoimista muodostuva determinantti

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

niin yhtälöryhmällä on tarkalleen yksi ratkaisu, nimittäin

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}},$$

kun $1 \leq i \leq n$. Ratkaisun osoittajassa on siis matriisin A determinantin i:s sarake korvattu yhtälöryhmän vakiotermisarakkeella.

Sama asia voidaan esittää lyhyemmin käyttämällä apuna matriisin pystyriviesitystä. Olkoon $A = (A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$ ja $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ja $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$. Jos

$$x_1A^{(1)} + x_2A^{(2)} + \cdots + x_nA^{(n)} = B$$

ja

$$\det A \neq 0,$$

niin yhtälöryhmällä on tarkalleen yksi ratkaisu, nimittäin

$$x_i = \frac{\det(A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, B, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)})}{\det A},$$

kun $i = 1, \dots, n$.

Linkit:

Determinantti

Lineaariset yhtälöt ja yhtälöryhmät

Cramerin säännön todistus