# Lineaarinen riippuvuus ja homogeeniset yhtälöryhmät

**Lause.** Olkoon $A = (A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$ neliömatriisi. Jos pystyvektorit $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$ ovat lineaarisesti riippuvia, niin $\det A = 0$. Jos $\det A \neq 0$, niin pystyvektorit $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$ ovat lineaarisesti riippumattomia.

*Todistus.* Lauseen väitteet ovat keskenään ekvivalentteja. Jos $\det A \neq 0$, niin sivun Homogeeninen yhtälöryhmä perusteella sarakkeet $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$ toteuttavat vain triviaalin relaation ja ovat täten lineaarisesti riippumattomia. □

Edellisen lauseen ja sivun Homogeeninen yhtälöryhmä lauseen nojalla on $\det(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) = 0$ jos ja vain jos pystyrivit $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$ ovat lineaarisesti riippuvia. Sivun Lineaarinen riippuvuus nojalla tämä on ekvivalenttia sen kanssa, että jokin joukon $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$ vektori $A^{(j)}$ on joukon muiden vektorien lineaarikombinaatio.

**Lause.** Jos lineaarisessa homogeenisessa yhtälöryhmässä

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

on enemmän tuntemattomia kuin yhtälöitä $(n > m)$, niin yhtälöryhmällä on aina epätriviaali ratkaisu.

*Todistus.* Lisäämällä yhtälöryhmään $n - m$ nollakertoimista yhtälöä saadaan yhtälöryhmä, jossa on yhtä monta tuntematonta kuin on yhtälöä. Tällä yhtälöryhmällä on samat ratkaisut kuin alkuperäisellä yhtälöryhmällä. Yhtälöryhmän kertoimista muodostuvan matriisin determinantti on nolla determinantin ominaisuuden (D3) nojalla, koska matriisissa on ainakin yksi vaakarivi nollia. Täten sivun Homogeeninen yhtälöryhmä lauseen mukaan yhtälöryhmällä on epätriviaali ratkaisu. □

---

**Linkit**:

Lineaariset yhtälöt ja yhtälöryhmät

Homogeeninen yhtälöryhmä

Determinantin perusominaisuuksia

Lineaarinen riippuvuus