Esimerkkejä ryhmistä

Esimerkki. Kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}$ muodostaa ryhmän, kun määritellään binäärioperaatioksi $*$ yhteenlasku $+$. Tarkistetaan väite käymällä lävitse ehdot $(G0)-(G3)$. Kokonaislukujen ominaisuuksien perusteella on selvää, että $\mathbb{Z}$ on suljettu operaation $+$ suhteen ja että operaatio $+$ on assosiatiivinen. Luku $0 \in \mathbb{Z}$ on ryhmän $(\mathbb{Z},+)$ neutraalialkio e, sillä kaikilla kokonaisluvuilla a :

$$0*a = 0+a = a = a+0 = a*0.$$

Luvun a käänteisalkio a^{-1} on nyt $-a$, sillä kaikilla $a \in \mathbb{Z}$

$$a*a^{-1} = a+(-a) = 0 = -a+a = a^{-1}*a.$$

Nyt on näytetty, että $(\mathbb{Z},+)$ on ryhmä. Koska $a*b = a+b = b+a = b*a$ kaikilla $a,b \in \mathbb{Z}$, niin todetaan vielä, että $(\mathbb{Z},+)$ on Abelin ryhmä.

Samoin voidaan todeta, että $\mathbb{Q}$ (rationaaliluvut), $\mathbb{R}$ (reaaliluvut) ja $\mathbb{C}$ (kompleksiluvut) muodostavat Abelin ryhmät yhteenlaskun suhteen.

Esimerkki. Joukko $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}\setminus\{0\}$ on Abelin ryhmä kertolaskun $\cdot$ suhteen. Ehdot $(G0)$, $(G1)$ ja $(G4)$ ovat selviä. Ryhmän $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ neutraalialkio on 1, sillä kaikilla $a \in \mathbb{Q}^*$:

$$a\cdot 1 = a = 1\cdot a.$$

Samoin todetaan, että alkion $a \in \mathbb{Q}^*$ käänteisalkio on $1/a$.

Samanlaisella päättelyllä voidaan osoittaa, että joukot $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ja $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ ovat ryhmiä kertolaskun suhteen.

Esimerkki. Nopeasti ajateltuna voi tuntua, että kaikki joukot muodostavat ryhmiä luonnollisten operaatioiden suhteen. Näin ei kuitenkaan ole. Esimerkiksi joukko $\mathbb{Z}$ ei muodosta ryhmää kertolaskun suhteen. Ryhmän vaatimuksista toteutuvat kaikki ehdot paitsi $(G3)$. Joukko $\mathbb{Z}$ on suljettu kertolaskun suhteen ja kertolasku on assosiatiivinen. Kaikilla luvuilla $a \in \mathbb{Z}$ käy neutraalialkioksi luku 1. Joukon $\mathbb{Z}$ alkiot ovat jopa kommutatiivisia kertolaskun suhteen. Ehdon $(G3)$ toteutumiseksi pitäisi kaikilla alkioilla olla käänteisalkio. Luku 0 aiheuttaa hankaluuksia, sillä $0\cdot a = 0$ kaikilla $a \in \mathbb{Z}$, ja täten luvulla 0 ei ole käänteisalkiota. Käänteialkio on ongelmallinen muidenkin lukujen kuin 0 kanssa. Ehdosta $a\cdot a^{-1} = 1$ seuraa, että $a^{-1} = \frac{1}{a}$, mutta $\frac{1}{a}$ ei ole joukon $\mathbb{Z}$ alkio, kun $a \neq 1$. Siis muilla luvuilla kuin 1 ei ole käänteisalkiota.

Edellisen perusteella ei myöskään $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ muodosta ryhmää kertolaskun suhteen.

Mieti, mikseivät $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{C}$ ole ryhmiä kertolaskun suhteen.

Linkit:
Ryhmä

Ryhmän perusominaisuuksia