Ryhmän perusominaisuuksia

Seuraava lause antaa käyttöön monesti tarvittavan **ryhmän yhtälön supistussäännön**.

Lause. Olkoon $(G,*)$ ryhmä ja $a,b,c \in G$. Silloin

(a) jos $a*b=a*c$, niin $b=c$,

(b) jos $b*a=c*a$, niin $b=c$.

Todistus. Oletetaan, että $a*b=a*c$. Koska a on ryhmän alkio, on sillä käänteisalkio a^{-1}. Silloin operoimalla tällä käänteisalkiolla oletuksen yhtälöä vasemmalta puolelta saadaan

$$a^{-1}*(a*b)=a^{-1}*(a*c).$$

Olkoon e ryhmän neutraalialkio. Neutraalialkion ominaisuuksien ja ryhmän assosiatiivisuuden nojalla saadaan

$$b=e*b=(a^{-1}*a)*b=(a^{-1}*a)*c=e*c=c.$$

Vastaavasti voidaan todistaa kohta (b). $\square$

Edellisen lauseen perusteella voidaan yhtälöstä $a*b=a*c$ supistaa molemmilta puolilta alkio a. Huomaa, että yhtälöstä $a*b=c*a$ ei yleisesti voi poistaa alkiota a molemmilta puolilta, vain Abelin ryhmissä tämä on yleisesti mahdollista.

Lause. Ryhmässä $(G,*)$ pätee:

(i) Ryhmän neutraalialkio e on yksikäsitteinen.

(ii) Jokaisella alkiolla $a \in G$ on yksikäsitteinen käänteisalkio a^{-1}.

(iii) Jos $a \in G$, niin $(a^{-1})^{-1}=a$.

(iv) Kaikilla $a,b \in G : (a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}$.

Todistus. (i) Tehdään vastaoletus, että ryhmällä $(G,*)$ on kaksi neutraalialkiota e ja e'. Silloin ehdon $(G2)$ nojalla $e=e*e'=e'$.

Kohta (ii) on edellisen lauseen seuraus.

(iii) Käänteisalkion määritelmän mukaan on $(a^{-1})^{-1}*a^{-1}=e$. Toisaalta $a*a^{-1}=e$, joten käyttäen taas edellisen lauseen supistussääntöä saadaan, että $(a^{-1})^{-1}=a$.

(iv) Suoraan laskemalla saadaan (käyttäen assosiatiivisuutta):

$$\begin{aligned}(a*b)*(b^{-1}*a^{-1}) &= ((a*b)*b^{-1})*a^{-1} \\ &= (a*(b*b^{-1}))*a^{-1} \\ &= (a*e)*a^{-1}=a*a^{-1}=e\end{aligned}$$

Samoin todetaan, että $(b^{-1}*a^{-1})*(a*b)=e$, joten saadaan väite. $\square$

Linkit:
Ryhmä