Aliryhmä

Määritelmä. Olkoon $(G,*)$ ryhmä. Jos $H \subseteq G$ ja $(H,*)$ on ryhmä sanotaan, että $(H,*)$ on ryhmän $(G,*)$ *aliryhmä*. Tätä merkitään $(H,*) \leq (G,*)$. Jos lisäksi $H \neq G$, voidaan merkitä $(H,*) < (G,*)$.

Aliryhmän määrittelyssä pitää kiinnittää erityistä huomiota ryhmän binäärioperaatioon ja siihen, että aliryhmä määräytyy nimenomaan saman operaation suhteen. Esimerkiksi kokonaislukujen joukon $\mathbb{Z}$ osajoukko $A = \{-1,1\}$ muodostaa ryhmän kertolaskun suhteen, mutta se ei ole ryhmän $(\mathbb{Z},+)$ aliryhmä, ja kuten esimerkeissä todettiin pari $(\mathbb{Z},\cdot)$ ei ole ryhmä.

Ryhmän $(G,*)$ ja sen aliryhmän $(H,*)$ neutraalialkiot ovat sama alkio. Tämä nähdään seuraavasti. Oletetaan, että e on ryhmän $(G,*)$ neutraalialkio ja e' on aliryhmän $(H,*)$ neutraalialkio. Koska $e' \in H \subseteq G$, voidaan ryhmässä G laskea, että $e' = e' * e'$. Kertomalla yhtälö puolittain alkion e' käänteisalkiolla $(e')^{-1}$ saadaan $e = (e')^{-1} * e' = (e')^{-1} * (e' * e') = ((e')^{-1} * e') * e' = e * e' = e'$.

Edellisestä seuraa, että joukon H alkion a käänteisalkio on sama aliryhmässä $(H,*)$ ja ryhmässä $(G,*)$.

Ryhmän $(G,*)$ *triviaalit aliryhmät* ovat ryhmä itse ja sen neutraalialkion muodostama ryhmä.

Seuraavaa lausetta käyttäen voidaan usein selvittää muodostaako annettu joukko aliryhmän.

Lause. [Aliryhmäkriteeri] Olkoon $(G,*)$ ryhmä ja $H \subseteq G$. Pari $(H,*)$ on ryhmän $(G,*)$ aliryhmä jos ja vain jos H on epätyhjä joukko ja $a * b^{-1} \in H$ kaikilla $a, b \in H$.

Todistus. Oletetaan ensin, että $(H,*)$ on ryhmän $(G,*)$ aliryhmä. Koska $(H,*)$ on ryhmä, on siinä neutraalialkio, siis H on epätyhjä joukko. Jos $b \in H$, niin $b^{-1} \in H$, koska $(H,*)$ on ryhmä. Jos edelleen $a \in H$, niin koska H on ryhmänä suljettu operaation $*$ suhteen, $a * b^{-1} \in H$.

Todistetaan väite vielä toiseen suuntaan. Oletetaan, että H on epätyhjä joukko ja $a * b^{-1} \in H$ kaikilla $a, b \in H$. Olkoon e ryhmän $(G,*)$ neutraalialkio. Jos $a \in H$, niin oletuksen nojalla $e = a * a^{-1} \in H$, joten joukossa H on neutraalialkio. Edelleen oletuksen nojalla $a^{-1} = e * a^{-1} \in H$, joten kaikilla joukon H alkioilla on käänteisalkio joukossa H. Nyt on näytetty ryhmän ehtojen $(G2)$ ja $(G3)$ toteutuvuus. Operaation $*$ assosiatiivisuus joukossa H seuraa siitä, että joukon H alkiot ovat myös joukon G alkioita ja ovat näin assosiatiivisia ryhmän $(G,*)$ binäärioperaation suhteen. Lopuksi todistetaan vielä, että H on suljettu operaation $*$ suhteen. Jos $a, b \in H$, niin edellä todistetun nojalla $b^{-1} \in H$. Oletuksen nojalla saadaan $a * b = a * (b^{-1})^{-1} \in H$. Täten $(H,*)$ on ryhmä ja siis $(H,*) \leq (G,*)$. $\square$

Linkit:
Ryhmä

Esimerkkejä aliryhmistä