Vasemmat sivuluokat

Määritelmä. Olkoon $(H,*) \leq (G,*)$. Ryhmän $(G,*)$ jokaiseen alkioon a liittyvää osajoukkoa

$$a*H = \{a*h \mid h \in H\}$$

sanotaan aliryhmän $(H,*)$ *vasemmaksi sivuluokaksi* (*coset*) ryhmässä $(G,*)$. Vastaavasti määritellään *oikeat sivuluokat* $H*a$.

Sekä vasen että oikea sivuluokka käyttäytyvät samalla tavalla. Täten riittää, että tarkastelemme vasempia sivuluokkia. Jos $(G,*)$ on Abelin ryhmä on $a*H = H*a$ kaikilla $a \in G$ ja silloin määreet vasen ja oikea voidaan jättää pois.

Ehto

$$b \sim a \quad \text{jos ja vain jos} \quad b \in a*H$$

määrittelee ekvivalenssirelaation ryhmässä $(G,*)$; tämä on helppo todeta käymällä läpi ekvivalenssirelaation ehdot. Tämän ekvivalenssirelaation määräämät ekvivalenssiluokat ovat muotoa

$$[a] = \{b \in G \mid b \in a*H\} = a*H,$$

siis ne ovat ryhmän $(G,*)$ aliryhmän $(H,*)$ vasemmat sivuluokat. Ekvivalenssiluokkien teorian perusteella aliryhmän $(H,*)$ vasemmat sivuluokat ryhmässä $(G,*)$ muodostavat joukon G partition. Siis

$$G = \bigcup_{a \in D} (a*H),$$

missä a käy läpi jonkin vasempien sivuluokkien edustajiston D.

Huomaa, että joukko H on itse yksi sivuluokka, sillä $H = e*H = H*e$, missä e on ryhmän $(G,*)$ neutraalialkio.

Määritelmä. Ryhmän $(G,*)$ vasempien sivuluokkien lukumäärää sanotaan aliryhmän H *indeksiksi* ryhmässä G, sitä merkitään $[G:H]$.

Indeksi voi olla myös ääretön.

Linkit:
Ekvivalenssirelaatio
Ekvivalenssiluokka