Huomioita ryhmähomomorfismista

Määritelmä. Olkoon $f : (G,*) \to (G',\bullet)$ ryhmähomomorfismi. Jos kuvaus f on

(i) injektio, niin kuvausta f sanotaan *monomorfismiksi*,

(ii) surjektio, niin kuvausta f sanotaan *epimorfismiksi*, ja

(iii) bijektio, niin kuvausta f sanotaan *isomorfismiksi*.

Ryhmiä $(G,*)$ ja $(G',\bullet)$ sanotaan *isomorfisiksi*, jos on olemassa jokin isomorfinen kuvaus $f : (G,*) \to (G',\bullet)$. Ryhmien $(G,*)$ ja $(G',\bullet)$ isomorfisuudesta käytetään merkintää $(G,*) \simeq (G',\bullet)$. Mikäli ryhmät eivät ole isomorfisia voidaan merkitä $(G,*) \not\simeq (G',\bullet)$.

Jos kuvaus $f : (G,*) \to (G',\bullet)$ on injektiivinen homomorfismi, niin kuvaus $f : (G,*) \to (\mathrm{Im}\,(G),\bullet)$ on isomorfismi.

Lause. Olkoot $f : (G,*) \to (G',\bullet)$ ja $g : (G',\bullet) \to (G'',\odot)$ ryhmähomomorfismeja.

(i) Yhdistetty kuvaus $g \circ f : (G,*) \to (G'',\odot)$ on homomorfismi.

(ii) Jos kuvaukset f ja g ovat isomorfismeja, samoin on yhdistetty kuvaus $g \circ f$.

(iii) Jos kuvaus f on isomorfismi, niin samoin on sen käänteiskuvaus $f^{-1} : (G',\bullet) \to (G,*)$.

Todistus. (i) Olkoon $a,b \in G$. Suoraan laskemalla käyttäen homomorfisuutta saadaan: $(g\circ f)(a*b) = g(f(a*b)) = g(f(a)\bullet f(b)) = g(f(a)) \odot g(f(b)) = (g\circ f)(a) \odot (g\circ f)(b)$. Siis yhdistetty kuvaus on homomorfismi.

(ii) Kohdan (i) perusteella yhdistetty kuvaus $g \circ f$ on homomorfismi. Vielä pitää osoittaa, että tämä yhdistetty kuvaus on bijektio. Tämän osoittaminen on suoraviivaista ja jätetään se harjoitukseksi.

(iii) Käänteiskuvaus on triviaalisti bijektiivinen. Vielä pitää osoittaa käänteiskuvauksen homomorfisuus. Olkoon $a',b' \in G'$. Koska f on isomorfismi, niin on olemassa sellaiset $a,b \in G$, että $a' = f(a)$ ja $b' = f(b)$. Nyt kuvauksen f homomorfisuudesta seuraa, että $f^{-1}(a'\bullet b') = f^{-1}(f(a)\bullet f(b)) = f^{-1}(f(a*b)) = a*b = f^{-1}(a') * f^{-1}(b')$. Täten käänteiskuvaus on isomorfismi. □

Kaikkien ryhmien joukossa ryhmien isomorfia on ekvivalenssirelaatio. Relaation symmetrisyys seuraa edellisen lauseen kohdasta (iii). Transitiivisuus puolestaan seuraa saman lauseen kohdasta (ii). Relaation refleksiivisyyden toteamiseksi huomaamme, että identiteettikuvaus $\mathrm{id}\colon (G,*) \to (G,*)$, missä $\mathrm{id}(x) = x$ kaikilla $x \in G$, on isomorfismi.

Ryhmäteorian kannalta isomorfiset ryhmät $(G,*)$ ja $(G',\bullet)$ ovat samanlaiset. Niiden alkiot vastaavat bijektiivisesti toisiaan, ja joukon G alkioiden binäärioperaatiota vastaa joukossa G' näiden alkioiden kuvien binäärioperaatio. Jos erityisesti joukot G ja G' ovat äärelliset niin ryhmän $(G,*)$ ryhmätaulusta saadaan ryhmän $(G',\bullet)$ ryhmätaulu korvaamalla jokainen alkioista isomorfisella kuvallaan.

Linkit:
Ryhmien homomorfia
Ekvivalenssirelaatio