Esimerkkejä ryhmähomomorfismeista

Esimerkki. Positiiviset reaaliluvut muodostavat kertolaskun suhteen ryhmän $(\mathbb{R}_+,\cdot)$. Samoin kaikki reaaliluvut muodostavat yhteenlaskun suhteen ryhmän $(\mathbb{R},+)$. Olkoon f kuvaus ryhmältä $(\mathbb{R}_+,\cdot)$ ryhmälle $(\mathbb{R},+)$, missä $f(x)=\log x$ kaikilla $x\in\mathbb{R}_+$. Logaritmin määritelmän perusteella $f(xy)=\log(xy)=\log x+\log y=f(x)+f(y)$. Täten kuvaus f on homomorfismi. Tarkastamalla bijektiivisyys huomataan, että kuvaus on isomorfismi.

Esimerkki. Olkoon $f:(\mathbb{Z},+)\to(\mathbb{Z}_m,+)$, missä ryhmän $(\mathbb{Z}_m,+)$ yhteenlasku on jäännösluokkien yhteenlasku ja missä $f(a)=\overline{a}$ kaikilla $a\in\mathbb{Z}$. Kuvaus f on homomorfismi, koska kaikilla $x,y\in\mathbb{Z}$ on $f(x+y)=\overline{x+y}=\overline{x}+\overline{y}=f(x)+f(y)$.

Esimerkki. Näytetään, etteivät ryhmät $(\mathbb{R},+)$ ja $(\mathbb{R}^*,\cdot)$, missä $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, ole isomorfisia. Pitää siis osoittaa, ettei ole olemassa mitään isomorfista kuvausta toiselta ryhmältä toiselle.

Ryhmän $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ neutraalialkio on 1. Tässä ryhmässä on kaksi alkiota $x=1$ ja $x=-1$, jotka toteuttavat yhtälön $x^2=1$. Jos olisi jokin isomorfismi f ryhmältä $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ ryhmälle $(\mathbb{R},+)$ niin $f(1)=f(1\cdot 1)=f(-1\cdot(-1))=f(1)+f(1)=f(-1)+f(-1)$. Toisaalta ryhmän $(\mathbb{R},+)$ neutraalialkio on 0 ja homomorfismi kuvaa neutraalialkion neutraalialkioksi, joten $f(1)=0$. Jotta f voisi olla isomorfismi pitäisi ryhmässä $(\mathbb{R},+)$ olla kaksi eri ratkaisua yhtälölle $x+x=0$, ratkaisuja on kuitenkin vain yksi $x=0$. Täten $(\mathbb{R},+)\not\simeq(\mathbb{R}^*,\cdot)$.

Esimerkki. Olkoon $(G,*)$ ryhmä ja $u\in G$. Osoitetaan, että kuvaus

$$f_u:(G,*)\to(G,*),\qquad f_u(a)=u*a*u^{-1}\quad\forall a\in G,$$

on isomorfismi.

Osoitetaan ensin, että kuvaus f_u on homomorfismi. Tämä tehdään suoraan laskemalla. Kaikilla $a,b\in G$:

$$f_u(a*b)=u*(a*b)*u^{-1}=u*a*u^{-1}*u*b*u^{-1}=f_u(a)*f_u(b).$$

Kuvauksen bijektiivisyyden toteamiseksi osoitetaan, että kuvauksella f_u on käänteiskuvaus. Näytetään, että kuvauksen f_u käänteiskuvaus on f_u^{-1}, jolle $f_u^{-1}(a)=u^{-1}*a*u$ kaikille $a\in G$:

$$(f_u\circ f_u^{-1})(a)=f_u(f_u^{-1}(a))=f_u(u^{-1}*a*u)=u*u^{-1}*a*u*u^{-1}=a$$

ja samoin voidaan osoittaa, että $(f_u^{-1}\circ f_u)(a)=a$. Koska molemmat yhdistetyt kuvaukset $f_u\circ f_u^{-1}$ ja $f_u^{-1}\circ f_u$ tuottavat identiteettikuvauksen on f_u^{-1} kuvauksen f_u käänteiskuvaus. Täten f_u on bijektio.

Isomorfista kuvausta ryhmältä itselleen sanotaan *automorfismiksi*. Esimerkin kuvaus on siis automorfismi.

Linkit:
Ryhmien homomorfia
Huomioita ryhmähomomorfismista