Normaali aliryhmä

Annettua ryhmää $(G,*)$ tutkittaessa on usein hyödyllistä käyttää apuna ryhmiä, jotka ovat yksinkertaisempia, esimerkiksi kertaluvultaan pienempiä. Tähän tarkoitukseen tarvitaan *normaalin aliryhmän* ja *tekijäryhmän* käsitteet.

Määritelmä. Ryhmän $(G,*)$ aliryhmää $(N,*)$ sanotaan *normaaliksi*, jos sen vasemmat ja oikeat sivuluokat yhtyvät, eli jos

$$a*N = N*a \qquad \forall a \in G.$$

Tällöin voidaan merkitä $(N,*) \trianglelefteq (G,*)$ tai jos kyseessä on aito normaali aliryhmä voidaan merkitä $(N,*) \triangleleft (G,*)$.

Jos $(G,*)$ on Abelin ryhmä sen jokainen aliryhmä on normaali. Yleisessä tapauksessa määritelmän yhtälöstä $a*N = N*a$ seuraa, että

$$\forall\, n \in N \quad \exists n_1 \in N \ : \quad a*n = n_1*a. \tag{1}$$

Lause. [Aliryhmän normaalisuuskriteeri] Olkoon $(N,*) \leq (G,*)$. Silloin $(N,*)$ on normaali jos ja vain jos

$$a*n*a^{-1} \in N \quad \forall\, a \in G, n \in N.$$

Todistus. Oletetaan ensin, että $(N,*) \trianglelefteq (G,*)$. Silloin ehdon (1) perusteella $a*n*a^{-1} = n_1 \in N$ kaikilla $a \in G$ ja $n \in N$.

Oletetaan toiseksi, että $a*n*a^{-1} \in N$ kaikilla $a \in G$ ja $n \in N$. Pitää osoittaa, että $a*N = N*a$. Valitaan $n \in N$ ja merkitään $a*n*a^{-1} = n_1$. Oletuksen mukaan $n_1 \in N$. Operoimalla saatua yhtälöä oikealta alkiolla a saadaan $a*n = n_1*a$. Tämän oikea puoli on sivuluokan $N*a$ alkio. Täten $a*N \subseteq N*a$.

Koska oletus pätee kaikille joukkojen G ja N alkioille saadaan $a^{-1}*n*a = n_2$, missä $n_2 \in N$. Operoimalla tätä yhtälöä vasemmalta alkiolla a saadaan $n*a = a*n_2$. Tässä oikea puoli kuuluu sivuluokkaan $a*N$. Täten $N*a \subseteq a*N$.

Yhdistämällä saadut tulokset saadaan väite $a*N = N*a$. □

Edellisen lauseen kriteerin voi myös muotoilla seuraavasti:

$$(N,*) \trianglelefteq (G,*) \quad \Leftrightarrow \quad a*N*a^{-1} \subseteq N \quad \forall\, a \in G.$$

Linkit:
Aliryhmä

Vasemmat sivuluokat