Huomioita normaaleista aliryhmistä ja homomorfismista

Lause. Olkoon $f : (G,*) \to (G',\bullet)$ ryhmähomomorfismi. Jos $(N,*) \trianglelefteq (G,*)$, niin $(f(N),\bullet) \trianglelefteq (f(G),\bullet)$.

Todistus. Ryhmien homomorfia -sivun lauseen perusteella on $(f(N),\bullet) \leq (f(G),\bullet)$. Vielä pitää todistaa, että kaikilla $b \in f(G)$ ja $y \in f(N)$ on $b \bullet y \bullet b^{-1} \in f(N)$. On olemassa sellaiset $a \in G$ ja $x \in N$, että $b = f(a)$ ja $y = f(x)$. Silloin

$$b \bullet y \bullet b^{-1} = f(a) \bullet f(x) \bullet f(b^{-1}) = f(a * x * a^{-1}).$$

Koska aliryhmä $(N,*)$ on normaali, niin $a * x * a^{-1} \in N$. Täten $f(a * x * a^{-1}) \in f(N)$. $\square$

Lause. Olkoon $f : (G,*) \to (G',\bullet)$ ryhmähomomorfismi. Silloin $(\ker(f),*) \trianglelefteq (G,*)$.

Todistus. Sivun Homomorfismin ydin ja kuva ensimmäisen lauseen perusteella $(\ker(f),*)$ on ryhmän $(G,*)$ aliryhmä.

Olkoon e' ryhmän $(G',\bullet)$ neutraalialkio ja oletetaan, että $a \in G$ ja $x \in \ker(f)$. Nyt

$$f(a * x * a^{-1}) = f(a) \bullet f(x) \bullet f(a^{-1}) = f(a) \bullet f(a)^{-1} = e',$$

joten $a * x * a^{-1} \in \ker(f)$ ja normaalisuuskriteerin nojalla $(\ker(f),*)$ on normaali. $\square$

Linkit:
Aliryhmä
Ryhmien homomorfia
Homomorfismin ydin ja kuva
Normaali aliryhmä