Esimerkkejä ryhmien homomorfialauseen käytöstä

Esimerkki. Palautetaan mieleen joukko $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{m-1}\}$. Kuvaus

$$f : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}_m, +), \qquad f(a) = \overline{a} \quad \forall\, a \in \mathbb{Z}$$

on homomorfismi, koska $f(a+b) = \overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b} = f(a) + f(b)$ kaikilla $a, b \in \mathbb{Z}$. Ryhmän $(\mathbb{Z}_m, +)$ neutraalialkio on $\overline{0}$. Täten $\ker(f) = \{a \in \mathbb{Z} \mid \overline{a} = \overline{0}\} = \{a \in Z \mid m \mid a\} = m\mathbb{Z}$. Koska $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{Z}_m$, on homomorfialauseen nojalla

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +) \simeq (\mathbb{Z}_m, +).$$

Kuten sivulla Esimerkkejä normaaleista aliryhmistä ja tekijäryhmistä on nyt luontevaa, että tekijäryhmän $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ operaatio on $+$. Tämän isomorfismin antaa kuvaus $F(a + m\mathbb{Z}) = f(a) = \overline{a}$ kaikilla $a \in \mathbb{Z}_m$.

Seuraavissa esimerkeissä tekijäryhmän operaatio $\cdot$ määritellään kuten sivun Tekijäryhmä lauseessa.

Esimerkki. Merkitään $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ja $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Kuvaus $f : (\mathbb{R}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}_+, \cdot)$, missä $f(x) = |x|$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^*$, on homomorfismi, sillä $f(xy) = |xy| = |x||y| = f(x)f(y)$. Koska ryhmän $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ neutraalialkio on 1, on kuvauksen ydin $\ker(f) = \{x \in \mathbb{R}^* \mid |x| = 1\} = \{\pm 1\}$. Selvästi $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}_+$. Täten homomorfialauseen nojalla kuvaus f indusoi isomorfismin

$$F : (R^*/\{\pm 1\}, \cdot) \to (\mathbb{R}_+, \cdot), \qquad F(a \cdot \{\pm 1\}) = a \quad \forall\, a \in \mathbb{R}_+.$$

Huomaa, että $a \cdot \{\pm 1\} = \{\pm a\}$ kaikilla $a \in \mathbb{R}^*$.

Esimerkki. Kuvaus (vertaa sivuun Esimerkkejä aliryhmistä)

$$f : (GL_n(\mathbb{R}), \cdot) \to (\mathbb{R}^*, \cdot), \qquad f(A) = \det(A) \quad \forall\, A \in GL_n(\mathbb{R})$$

on homomorfismi, sillä $f(AB) = \det(AB) = \det(A)\det(B) = f(A) \cdot f(B)$ kaikilla $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$.

Ryhmän $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ neutraalialkio on 1, joten

$$\ker(f) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\} = SL_n(\mathbb{R}).$$

Koska $\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}^*$ saadaan homomorfialauseen mukaan

$$(GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}), \cdot) \simeq (\mathbb{R}^*, \cdot).$$

Esimerkki. Olkoon e ryhmän $(G, *)$ neutraalialkio. Triviaali homomorfismi $f : (G, *) \to (G, *)$, missä $f(a) = e$ kaikilla $a \in G$, indusoi isomorfian

$$(G/G, \cdot) \simeq (\{e\}, *).$$

Identtinen kuvaus id:$(G, *) \to (G, *)$, missä $\mathrm{id}(a) = a$ kaikilla $a \in G$, on homomorfismi ja se indusoi isomorfian

$$(G/\{e\}, \cdot) \simeq (G, *).$$

Linkit:

Esimerkkejä normaaleista aliryhmistä ja tekijäryhmistä

Tekijäryhmä

Ryhmien homomorfialause

Esimerkkejä aliryhmistä