Rengas

Rengas on algebrallinen systeemi, jossa on kaksi operaatiota. Tyypillinen esimerkki renkaasta on kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}$ varustettuna yhteen- ja kertolaskulla. Myös yleisessä määritelmässä on tapana käyttää operaatioina yhteen- ja kertolaskumerkintää. Kuten tavallista kertolaskun merkintä $\cdot$ jätetään usein merkitsemättä.

Määritelmä. Kolmikkoa $(R,+,\cdot)$ sanotaan *renkaaksi*, jos se täyttää seuraavat ehdot:

(R1) $(R,+)$ on Abelin ryhmä.

(R2) Jos $a,b \in R$, niin $a \cdot b \in R$. Siis $\cdot$ on joukossa R määritelty binäärioperaatio.

(R3) Kaikilla $a,b,c \in R$ on
$$a(bc) = (ab)c \qquad \text{(liitäntä- eli assosiatiivilaki).}$$

(R4) Joukossa R on olemassa sellainen alkio 1_R, että kaikilla $a \in R$ on $a \cdot 1_R = 1_R \cdot a = a$. Alkiota 1_R sanotaan renkaan *ykkösalkioksi.*

(R5) Kaikilla $a,b,c \in R$ on
$$a(b+c) = ab+ac \quad \text{ja} \quad (a+b)c = ac+bc \qquad \text{(distributiivilait).}$$

Jos operaatio $\cdot$ on lisäksi kommutatiivinen eli kaikilla $a,b \in R$ on $a \cdot b = b \cdot a$, niin sanotaan, että $(R,+,\cdot)$ on *kommutatiivinen rengas.*

Joskus renkaan määritelmästä jätetään postulaatti (R4) pois. Tällöin yllä määriteltyä rengasta sanotaan *ykkösalkiolla varustetuksi.*

Renkaan ykkösalkio 1_R on yksikäsitteinen. Nimittäin, jos renkaassa olisi kaksi ykkösalkiota 1_R ja $1'_R$, niin postulaatin (R4) nojalla saadaan $1_R = 1'_R \cdot 1_R = 1'_R$.

Postulaatin (R1) nojalla renkaassa on yhteenlaskun suhteen neutraalialkio e ja kaikkien alkioiden a vasta-alkiot $-a$. Renkaan tapauksessa neutraalialkiosta e puhutaan usein renkaan *nolla-alkiona* ja sitä merkitään 0_R. Lisäksi postulaatista (R1) seuraa, että yhteenlasku on assosiatiivinen ja kommutatiivinen.

Renkaasta $(R,+,\cdot)$ voidaan puhua yksinkertaisesti vain renkaana R, jos operaatiot $+$ ja $\cdot$ ovat asiayhteydestä selviä.

Linkit:
Ryhmä