Alirengas

Määritelmä. Olkoon $(R,+,\cdot)$ rengas ja $S \subseteq R$. Kolmikkoa $(S,+,\cdot)$ sanotaan renkaan R *alirenkaaksi*, jos

AR1. S on rengas operaatioiden $+$ ja $\cdot$ suhteen ja

AR2. renkaan $(R,+,\cdot)$ ykkösalkio 1_R on renkaan $(S,+,\cdot)$ ykkösalkio 1_S, siis $1_R = 1_S$.

Jos $(S,+,\cdot)$ on renkaan $(R,+,\cdot)$ alirengas, niin ryhmä $(S,+)$ on ryhmän $(R,+)$ aliryhmä. Täten myös renkaan nolla-alkio 0_R on sen alirenkaan nolla-alkio (katso sivu Aliryhmä).

Lause. (Alirengaskriteeri) Olkoon $(R,+,\cdot)$ rengas ja $S \subseteq R$. Silloin $(S,+,\cdot)$ on renkaan R alirengas jos ja vain jos seuraavat ehdot toteutuvat:

(i) $1_R \in S$,

(ii) $a - b \in S$ kaikilla $a, b \in S$,

(iii) $a \cdot b \in S$ kaikilla $a, b \in S$.

Todistus. Jos $(S,+,\cdot)$ on renkaan $(R,+,\cdot)$ alirengas, niin ehdot (i)-(iii) toteutuvat triviaalisti.

Oletetaan kääntäen, että $S \subseteq R$ ja ehdot (i)-(iii) toteutuvat. Ehdosta (i) seuraa, että S on epätyhjä; yhdessä ehdon (ii) kanssa tästä seuraa aliryhmäkriteerin perusteella, että $(S,+)$ on ryhmän $(R,+)$ aliryhmä. Ehdosta (i) seuraa renkaan postulaatin (R4) toteutuvuus. Ehdosta (iii) puolestaan seuraa renkaan postulaatin (R2) toteutuvuus. Joukon R alkioina joukon S alkiot toteuttavat assosiatiivisuuden ja distributiivilait. $\square$

Linkit:
Rengas
Aliryhmä