Renkaiden homomorfia

Määritelmä. Olkoot $(R,+,\cdot)$ ja $(R',+',\cdot')$ renkaita. Kuvausta $f:(R,+,\cdot)\to(R',+',\cdot')$ sanotaan *(rengas)homomorfismiksi*, jos se täyttää ehdot:

RH1. $f(a+b)=f(a)+'f(b) \quad \forall\, a,b\in R$,

RH2. $f(a\cdot b)=f(a)\cdot' f(b) \quad \forall\, a,b\in R$,

RH3. $f(1_R)=1_{R'}$.

Määritelmän mukaan kuvaus $f:(R,+,\cdot)\to(R',+',\cdot')$ on rengashomomorfismi jos ja vain jos f on ryhmähomomorfismi $(R,+)\to(R',+')$ ja sillä on ominaisuudet RH2 ja RH3. Ryhmähomorfismin ominaisuuksien perusteella rengashomomorfismi $f:(R,+,\cdot)\to(R',+',\cdot')$ toteuttaa kaikilla $a\in R$ ehdot

$$f(0_R)=0_{R'}, \qquad f(-a)=-'f(a).$$

Lisäksi ehtojen RH2 ja RH3 nojalla

$$f(a^{-1})=f(a)^{-1} \quad \forall\, a\in R,$$

sillä $f(a)\cdot' f(a^{-1})=f(a\cdot a^{-1})=f(1_R)=1_{R'}$ ja samoin nähdään, että $f(a^{-1})\cdot' f(a)=1_{R'}$.

Lause. Olkoon $f:(R,+,\cdot)\to(R',+',\cdot')$ rengashomomorfismi.

(i) Jos $(S,+,\cdot)$ on renkaan $(R,+,\cdot)$ alirengas, niin $(f(S),+',\cdot')$ on renkaan $(R',+',\cdot')$ alirengas.

(ii) Jos I on renkaan $(R,+,\cdot)$ ihanne, niin $f(I)$ on renkaan $(f(R),+',\cdot')$ ihanne.

Todistus. (i) Todistetaan väite käyttäen alirengaskriteeriä. Koska S on renkaan R alirengas, niin $1_R\in S$. Lisäksi $f(1_R)=1_{R'}$, joten $1_{R'}\in f(S)$. Jos $a',b'\in f(S)$, niin on olemassa sellaiset $a,b\in S$, että $a'=f(a)$ ja $b'=f(b)$. Nyt

$$a'-'b'=f(a)-'f(b)=f(a)+f(-b)=f(a-b)\in f(S),$$

koska $a-b\in S$ alirengaskriteerin nojalla. Vastaavasti

$$a'\cdot' b'=f(a)\cdot' f(b)=f(a\cdot b)\in f(S).$$

(ii) Kohdan (i) nojalla $(f(R),+',\cdot')$ on rengas. Todistetaan väite käyttäen ihannekriteeriä. Koska I on ihanteena epätyhjä, samoin on $f(I)$. Vastaavasti kuin kohdassa (i) todetaan, että kaikkien joukon $f(I)$ alkioiden erotus kuuluu joukkoon $f(I)$. Jos $a'\in f(I)$, niin on olemassa sellainen $a\in I$, että $a'=f(a)$. Vastaavasti kaikilla $r'\in f(R)$ on olemassa sellainen $r\in R$, että $r'=f(r)$. Nyt

$$r'\cdot' a'=f(r)\cdot' f(a)=f(r\cdot a)\in f(I),$$

koska $ra\in I$. Samoin nähdään, että $a'\cdot' r'\in f(I)$ kaikilla $a'\in f(I)$ ja $r'\in f(R)$. $\square$

Linkit:
Ryhmien homomorfia
Alirengas
Ihanne