Rengashomomorfismin ydin ja kuva

Rengashomomorfismin $f:(R,+,\cdot)\to(R',+',\cdot')$ *ydin* on

$$\ker(f)=\{a\in R\mid f(a)=0_{R'}\}.$$

Rengashomomorfismin $f:(R,+,\cdot)\to(R',+',\cdot')$ *kuva* on

$$\mathrm{Im}\,(f)=\{f(a)\mid a\in R\}=f(R).$$

Koska $(R,+,\cdot)$ on itsensä triviaali alirengas, saadaan sivun Renkaiden homomorfia lauseen kohdan (i) perusteella, että $(\mathrm{Im}\,(f),+',\cdot')$ on renkaan $(R',+',\cdot')$ alirengas.

Lause. Rengashomomorfismin $f:(R,+,\cdot)\to(R',+',\cdot')$ ydin $\ker(f)$ on renkaan $(R,+,\cdot)$ ihanne.

Todistus. Todistetaan väite käyttäen ihannekriteeriä. Koska $f(0_R)=0_{R'}$, niin $0_R\in\ker(f)$ ja täten $\ker(f)$ on epätyhjä joukko.

Jos $a,b\in\ker(f)$, niin
$$f(a-b)=f(a)-'f(b)=0_{R'}-'0_{R'}=0_{R'}.$$
Täten $a-b\in\ker(f)$. Kaikilla $r\in R$ ja $a\in\ker(f)$ saadaan käyttäen hyväksi sivun Renkaan aritmetiikkaa lausetta:

$$f(r\cdot a)=f(r)\cdot' f(a)=f(r)\cdot' 0_{R'}=0_{R'}.$$

Täten $r\cdot a\in\ker(f)$. Vastaavasti nähdään, että $a\cdot r\in\ker(f)$. $\square$

Jos rengashomomorfismia $f:(R,+,\cdot)\to(R',+',\cdot')$ ajatellaan vain ryhmähomomorfismina $f:(R,+)\to(R',+')$, niin kuvauksen ydin ja kuva eivät muutu, vaan ovat edelleen edellä määritellyt joukot. Täten sivun Ryhmähomomorfismin ydin ja kuva toisen lauseen nojalla rengashomomorfismi $f:(R,+,\cdot)\to(R',+',\cdot')$ on injektio jos ja vain jos $\ker(f)=\{0_R\}$.

Määritelmä. Rengashomomorfismia $f:(R,+,\cdot)\to(R',+',\cdot')$ sanotaan *(rengas)isomorfismiksi*, jos kuvaus f on bijektiivinen. Jos on olemassa jokin isomorfismi $f:(R,+,\cdot)\to(R',+',\cdot')$, rengasta $(R,+,\cdot)$ sanotaan *isomorfiseksi* renkaan $(R',+',\cdot')$ kanssa. Tällöin voidaan merkitä $(R,+,\cdot)\simeq(R',+',\cdot')$.

Erilaisista homomorfismeista käytetään myös muita nimityksiä:
monomorfismi = injektiivinen homomorfismi,
epimorfismi = surjektiivinen homomorfismi,
endomorfismi = homomorfismi systeemiltä itseensä,
automorfismi = isomorfismi systeemiltä itselleen.

Linkit:
Renkaiden homomorfia

Renkaan aritmetiikkaa

Ryhmähomomorfismin ydin ja kuva