Esimerkkejä rengashomomorfismeista

Esimerkki. Olkoon $(R,+,\cdot)$ rengas. Identiteettikuvaus $\mathrm{id}_R : (R,+,\cdot) \to (R,+,\cdot)$, missä kaikilla $a \in R$ on $\mathrm{id}_R(a) = a$, on rengasisomorfismi.

Nollakuvaus $f(a) = 0_R$ kaikilla $a \in R$ ei ole homomorfismi, koska se ei toteuta ehtoa RH3.

Esimerkki. Kuvaus $f : (\mathbb{R}[x],+,\cdot) \to (\mathbb{R},+,\cdot)$, missä $f(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = a_0$, on rengashomomorfismi. Nimittäin, jos $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m \in \mathbb{R}[x]$ (voidaan olettaa, että $m \geq n$), niin

$$\begin{aligned} f(a_0 + \cdots + a_nx^n + b_0 + \cdots + b_mx^m) &= f(a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n + b_{n+1}x^{n+1} + \cdots + b_mx^m) \\ &= a_0 + b_0 = f(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) + f(b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m). \end{aligned}$$

Lisäksi

$$\begin{aligned} f((a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) \cdot (b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m)) &= f(a_0b_0 + a_0b_1x + \cdots + a_nb_mx^{n+m}) \\ &= a_0b_0 = f(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) \cdot f(b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m). \end{aligned}$$

Renkaan $(\mathbb{R}[x],+,\cdot)$ ykkösalkio on luku 1. Koska $f(1) = 1$, niin myös viimeinen rengashomomorfismin ehto toteutuu.

Tämän rengashomomorfismin ydin $\ker(f)$ on

$$\begin{aligned} \ker(f) &= \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid f(p(x)) = 0_R = 0\} \\ &= \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \text{polynomin } p(x) \text{ vakiotermi on } 0\}. \end{aligned}$$

Rengashomomorfismin kuva $\mathrm{Im}\,(f)$ on reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$. Kyseessä on siis epimorfismi.

Renkaiden homomorfialauseen mukaan rengashomomorfismi f indusoi rengasisomorfismin

$$F : (\mathbb{R}[x]/\ker(f),+,\cdot) \to (\mathbb{R},+,\cdot),$$

missä $F(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \ker(f)) = F(a_0 + \ker(f)) = f(a_0) = a_0$.

Esimerkki. Näytetään, että kuvaus $f : (\mathbb{C},+,\cdot) \to (\mathbb{C},+,\cdot)$, missä $f(x+iy) = x - iy$, on rengasautomorfismi. Kuvaus f on homomorfismi sillä kaikilla $x_1 + iy_1, x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$ on

$$\begin{aligned} f(x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2) &= f(x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)) = x_1 + x_2 - i(y_1 + y_2) \\ &= x_1 - iy_1 + x_2 - iy_2 = f(x_1 + iy_1) + f(x_2 + iy_2) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} f((x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)) &= f(x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2)) = x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2 + y_1x_2) \\ &= (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = f(x_1 + iy_2)f(x_2 + iy_2). \end{aligned}$$

Renkaan $\mathbb{C}$ ykkösalkio on 1. Koska $f(1) = 1$, toteutuvat kaikki rengashomomorfismin ehdot.

Homomorfismi on injektio, sillä $\ker(f) = \{0\}$. Selvästi homomorfismi on myös surjektio, joten se on bijektio ja näin ollen automorfismi.

Linkit:
Esimerkkejä alirenkaista
Renkaiden homomorfia
Rengashomomorfismin ydin ja kuva
Renkaiden homomorfialause