Esimerkkejä nollanjakajista ja kokonaisalueista

Esimerkki. Renkaassa $(\mathbb{Z}_{10},+,\cdot)$ jäännösluokat $\overline{2}$ ja $\overline{5}$ ovat nollanjakajia, sillä $\overline{2}\cdot\overline{5}=\overline{10}=\overline{0}$.

Esimerkki. Matriisi $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ on nollanjakaja renkaassa $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),+,\cdot)$, missä operaatiot ovat matriisien yhteenlasku ja matriisitulo, sillä

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esimerkki. Osoitetaan, että renkaan $(\mathbb{Z}_m,+,\cdot)$ alkio $\overline{a}$ on nollanjakaja jos ja vain jos $\overline{a}\neq\overline{0}$ ja $\mathrm{syt}(a,m)>1$.

Oletetaan ensin, että $\overline{a}\neq\overline{0}$ ja $\mathrm{syt}(a,m)>1$. Merkitään $\mathrm{syt}(a,m)=d$, silloin $a=a_1d$ ja $m=m_1d$ joillekin luvuille a_1 ja m_1. Nyt $am_1=a_1dm_1=a_1m$, siis $\overline{am_1}=\overline{0}$ renkassa $\mathbb{Z}_m$. Koska $d>1$, niin $m>m_1$ ja $m\nmid m_1$, joten $\overline{m_1}\neq\overline{0}$. Täten $\overline{a}$ on nollanjakaja.

Oletetaan toiseksi, että alkio $\overline{a}$ on renkaan $\mathbb{Z}_m$ nollanjakaja. Silloin on olemassa sellainen $\overline{b}\in\mathbb{Z}_m$, $\overline{b}\neq\overline{0}$, että $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{0}$. Renkaassa $\mathbb{Z}_m$ tämä tarkoittaa sitä, että $m\mid ab$. Koska $\overline{a}\neq\overline{0}$ ja $\overline{b}\neq\overline{0}$, niin $m\nmid a$ ja $m\nmid b$. Välttämättä siis $\mathrm{syt}(a,m)>1$ (ajattele lukujen alkutekijähajotelmaa).

Esimerkki. Edellisen esimerkin nojalla rengas $(\mathbb{Z}_m,+,\cdot)$ on kokonaisalue jos ja vain jos m on alkuluku. Silloin tämän jäännösluokkarenkaan karakteristika on m.

Esimerkki. Kaikki lukurenkaat ovat kokonaisalueita. Kaikkien sivulla Esimerkkejä renkaista esitettyjen lukurenkaiden karakteristika on 0.

Esimerkki. Olkoon p alkuluku. Binomikertoimet

$$\binom{p}{k}=\frac{p!}{k!(p-k)!}=\frac{1\cdot2\cdot\dots\cdot p}{(1\cdot2\cdot\dots\cdot k)(1\cdot2\cdot\dots\cdot(p-k))},$$

kaikilla $k=1,2,\dots,p-1$, ovat jaollisia luvulla p, koska p on tekijänä osoittajassa, mutta nimittäjässä se ei ole (p on alkuluku). Toisaalta tiedetään, että binomikerroin on aina kokonaisluku, joten p on binomikertoimen $\binom{p}{k}$ tekijä, kun $0<k<p$.

Olkoon $(D,+,\cdot)$ kokonaisalue, jonka karakteristika on p. Kokonaisalueen kommutatiivisuuden nojalla voidaan binomikaavaa käyttää laskettaessa kokonaisalueessa D sen alkioiden summan potenssia. Siis, jos $a,b\in D$, niin

$$(a+b)^p=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}a^kb^{p-k}=\binom{p}{0}b^p+\binom{p}{p}a^p=a^p+b^p,$$

koska $\mathrm{char}(D)=p$.

Linkit:
Kokonaisalue

Aritmetiikan peruslause

Esimerkkejä renkaista