Huomioita alikunnasta

Millaisia alikuntia kunnalla $(K,+,\cdot)$ voi olla? Jokainen alikunta sisältää kunnan K ykkösalkion 1_K. Täten alikunnat sisältävät myös kaikki ykkösalkion monikerrat $n1_K$, missä $n \in \mathbb{Z}$. Tämä johtaa seuraavaan havaintoon.

Lemma. Jokaisella kunnalla $(K,+,\cdot)$ on alirenkaana kokonaisalue $(D,+,\cdot)$, missä

$$D = \{n1_K \mid n \in \mathbb{Z}\} \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}_p, & \text{jos } \mathrm{char}(K) = p, \\ \mathbb{Z}, & \text{jos } \mathrm{char}(K) = 0. \end{cases}$$

Todistus. Muodostetaan kuvaus

$$f : (\mathbb{Z},+,\cdot) \to (K,+,\cdot), \qquad f(n) = n1_K \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}.$$

Osoitetaan ensin, että kuvaus f on rengashomomorfismi. Kaikilla $a,b \in \mathbb{Z}$ on sivun Renkaiden aritmetiikkaa huomioiden perusteella $f(a+b) = (a+b)1_K = a1_K + b1_K = f(a) + f(b)$. Lisäksi $f(a\cdot b) = (a\cdot b)1_K = a \cdot b1_K = a1_K \cdot b1_K = f(a)\cdot f(b)$. Sivun Rengashomomorfismin ydin ja kuva perusteella $(\mathrm{Im}\,(f),+,\cdot)$ on kunnan $(K,+,\cdot)$ alirengas (ja silloin välttämättä myös kokonaisalue).

Renkaiden homomorfialauseen perusteella $\mathbb{Z}/\ker(f) \simeq \mathrm{Im}\,(f) \subseteq K$. Tässä $\mathrm{Im}\,(f) = \{n1_K \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ja

$$\ker(f) = \{n \in \mathbb{Z} \mid n1_K = 0_K\} = \begin{cases} p\mathbb{Z}, & \text{jos } \mathrm{char}(K) = p, \\ \{0\}, & \text{jos } \mathrm{char}(K) = 0. \end{cases}$$

Nyt siis $D = \mathrm{Im}\,(f) \simeq \mathbb{Z}/\ker(f)$, ja lemman isomorfiat seuraavat, kun huomataan, että $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_p$ ja $\mathbb{Z}/\{0\} = \mathbb{Z}$. Sivun Esimerkkejä nollanjakajista ja kokonaisalueista mukaan $(\mathbb{Z}_p,+,\cdot)$ ja $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ ovat kokonaisalueita. □

Lause. Olkoon kokonaisalue $(D,+,\cdot)$ kunnan $(K,+,\cdot)$ alirengas. Määritellään joukko

$$K_D = \{\frac{a}{b} \mid a,b \in D, b \neq 0_D\}.$$

Kolmikko $(K_D,+,\cdot)$ on kunnan $(K,+,\cdot)$ alikunta. Lisäksi $(K_D,+,\cdot)$ on kaikkien kunnan K alikuntien $(F,+,\cdot)$, joilla $D \subseteq F$, alikunta.

Todistus. Todistetaan ensimmäinen väite käyttäen alikuntakriteeriä. Koska $D \subseteq K_D$ ja $(D,+,\cdot)$ on rengas, niin $\{1_D, 0_D\} \subseteq K_D$. Olkoot $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in K_D$. Silloin $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd} \in K_D$, koska $ad-bc, bd \in D$. Jos $\frac{c}{d} \neq 0_D$, toisin sanoen $c \neq 0_D$, niin $\frac{a}{b}/\frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} \in K_D$.

Lauseen jälkimmäinen väite on ilmeinen, koska jokainen kunta $(F,+,\cdot)$, jolle $D \subseteq F$, sisältää alkioiden $a,b \in D$ mukana osamäärän $\frac{a}{b}$, kun $b \neq 0_D$. □

Jos $(K,+,\cdot)$ on lukukunta, sen alirengas on kokonaisalue $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ (lemman mukaan), ja edellisessä lauseessa esiintyvä joukko $K_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Q}$.

Linkit:
Alikunta
Renkaan aritmetiikkaa
Rengashomomorfismin ydin ja kuva
Renkaiden homomorfialause
Esimerkkejä nollanjakajista ja kokonaisalueista