Kokonaisalueen osamääräkunnan konstruktio

Olkoon $(R,+,\cdot)$ rengas. Voidaanko $(R,+,\cdot)$ jotenkin laajentaa kunnaksi? Laajennus on selvästi mahdoton, jos rengas R ei ole kommutatiivinen tai joukossa R on nollanjakajia. Jos $(R,+,\cdot)$ on kokonaisalue, voidaan R laajentaa kunnaksi konstruoimalla niin sanottu *kokonaisalueen R osamääräkunta* $Q(R)$, jossa R on alirenkaana. Konstruktiossa liitetään joukkoon R sen nollasta eroavien alkioiden b käänteisalkiot $\frac{1}{b}$ ja lisäksi tulot $a\cdot\frac{1}{b}=\frac{a}{b}$ kaikilla $a\in R$.

Esitetään konstruktio vielä yksityiskohtaisesti. Se, että konstruktio tuottaa kunnan, todistetaan sivulla Kokonaisalueen osamääräkunta.

Olkoon $(D,+,\cdot)$ kokonaisalue. Muodostetaan joukko

$$X=\{(a,b)\mid a,b\in D,\ b\neq 0\}$$

ja määritellään tässä joukossa relaatio $\sim$ seuraavasti:

$$(a,b)\sim(c,d)\quad\Leftrightarrow\quad ad=bc.$$

Relaatio $\sim$ todetaan ekvivalenssirelaatioksi tarkistamalla ekvivalenssirelaation ehdot E1-E3. Oletetaan, että $(a,b),(c,d),(e,f)\in X$. Selvästi $\sim$ on refleksiivinen: $(a,b)\sim(a,b)$. Relaation $\sim$ symmetrisyys seuraa siitä, että kokonaisalue D on kommutatiivinen. Lisäksi $\sim$ on transitiivinen, sillä jos $(a,b)\sim(c,d)$ ja $(c,d)\sim(e,f)$, niin $ad=bc$ ja $cf=de$. Koska $b\neq 0$, saadaan $c=\frac{ad}{b}$. Sijoittamalla tämä jälkimmäiseen yhtälöön ja laventamalla alkiolla b ja supistamalla alkiolla d saadaan $af=be$ eli $(a,b)\sim(e,f)$.

Joukko X voidaan partitioida ekvivalenssiluokkiin $[(a,b)]$. Näitä luokkia sanotaan *formaalisiksi osamääriksi* ja niistä käytetään merkintää $\frac{a}{b}$. Siis

$$\frac{a}{b}=\{(x,y)\mid(x,y)\sim(a,b)\}=\{(x,y)\mid x,y\in D,\ y\neq 0,\ xb=ya\}.$$

Erityisesti $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ jos ja vain jos $ad=bc$. Kaikkien formaalisten osamäärien joukosta käytetään merkintää $Q(D)$. Siis

$$Q(D)=\{\frac{a}{b}\mid a,b\in D,\ b\neq 0\}.$$

Määritellään joukossa $Q(D)$ yhteen- ja kertolasku. Jos $\frac{a}{b},\frac{c}{d}\in Q(D)$, niin

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd},\qquad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Pitää osoittaa, että operaatiot ovat hyvinmääriteltyjä, toisin sanoen operaatioiden tulos pysyy joukossa $Q(D)$ ja operaatiot ovat riippumattomia ekvivalenssiluokan edustajan valinnasta. Ensinnäkin, koska $b\neq 0_D$, $d\neq 0_D$ ja D on kokonaisalue, niin $bd\neq 0_D$. Oletetaan sitten, että $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$ ja $\frac{c}{d}=\frac{c'}{d'}$. Silloin $ab'=ba'$ ja $cd'=dc'$. Käyttäen kokonaisalueen kommutatiivisuutta ja distributiivilakia saadaan

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{(ad+cb)b'd'}{bdb'd'}=\frac{adb'd'+cbb'd'}{bdb'd'}=\frac{ba'dd'+dc'bb'}{bdb'd'}=\frac{bd(a'd'+b'c')}{bdb'd'}=\frac{a'}{b'}+\frac{c'}{d'}.$$

Kertolasku voidaan käsitellä samoin.

Linkit:

Kokonaisalue

Kokonaisalueen osamääräkunta

Alirengas

Ekvivalenssirelaatio

Ekvivalenssiluokka