Maksimaalinen ihanne

Kommutatiivisista renkaista voidaan muodostaa kuntia *maksimaalisen ihanteen* avulla.

Määritelmä. Olkoon $(R,+,\cdot)$ rengas. Renkaan R ihannetta M sanotaan *maksimaaliseksi*, jos se on aito (toisin sanoen $M \neq R$) ja ei ole olemassa renkaan R ihannetta I, joka toteuttaisi $M \subset I \subset R$. Määritelmän jälkimmäinen ehto on usein mukava ajatella muodossa: Jos I on renkaan $(R,+,\cdot)$ ihanne ja $M \subset I$, niin $I = R$.

Lause. Olkoon $(R,+,\cdot)$ kommutatiivinen rengas ja I sen ihanne. Jäännösluokkarengas $(R/I,+,\cdot)$ on kunta jos ja vain jos I on renkaan $(R,+,\cdot)$ maksimaalinen ihanne.

Todistus. Oletetaan ensin, että $(R/I,+,\cdot)$ on kunta. Koska kunnassa on vähintään kaksi alkiota, niin $I \neq R$. Oletetaan, että on olemassa renkaan $(R,+,\cdot)$ ihanne J, jolle pätee $I \subset J$. Näytetään, että tästä seuraa $J = R$.

Koska I on ihanteen J aito osajoukko, on olemassa alkio $a \in J \setminus I$. Silloin $a+I \neq I$, joten $a+I$ ei ole kunnan $(R/I,+,\cdot)$ nolla-alkio. Täten alkiolla $a+I$ on käänteisalkio $b+I$ jollakin $b \in R$, siis

$$(a+I)(b+I) = ab+I = 1_R+I.$$

Tästä saadaan, että $1_R = ab+i$, jollain alkiolla $i \in I$. Koska $a \in J$ ja $i \in J$, niin $ab+i \in J$ ehdon I2 nojalla. Kuten sivulla Ihanne todettiin siitä, että $1_R \in J$ seuraa, että $J = R$.

Todistetaan väite toiseen suuntaan eli oletetaan, että I on renkaan R maksimaalinen ihanne. Koska rengas R on kommutatiivinen, niin samoin on jäännösluokkarengas $(R/I,+,\cdot)$. Vielä pitää osoittaa, että kaikilla jäännösluokkarenkaan $(R/I,+,\cdot)$ nolla-alkiosta I eroavilla alkioilla on käänteisalkio joukossa R/I.

Olkoon $a+I \in R/I$ erisuuri kuin I. Silloin $a \notin I$. Koska I on maksimaalinen ihanne, niin joukon $\{I,a\}$ generoima ihanne on oltava R. Koska $(R/I,+,\cdot)$ on kommutatiivinen, saadaan sivun Ihanteen generointi ja pääihannerengas lauseen mukaan, että

$$R = < I,a > = \{i+ra \mid i \in I,\ r \in R\}.$$

Koska kaikki joukon R alkiot voidaan esittää muodossa $i+ra$, niin erityisesti ykkösalkio $1_R = i'+r'a$, joillakin $i' \in I$ ja $r' \in R$. Tämä on ekvivalenttia sen kanssa, että

$$1_R+I = r'a+I = (r'+I)(a+I).$$

Täten $r'+I$ on alkion $a+I$ käänteialkio ja $(R/I,+,\cdot)$ on siis kunta. □

Linkit:

Rengas

Kunta

Ihanne

Jäännösluokkarengas

Ihanteen generointi ja pääihannerengas