Polynomin aste

Olkoon $(R,+,\cdot)$ rengas ja $(R[x],+,\cdot)$ polynomirengas yli renkaan R.

Määritelmä. Jos polynomissa $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ on $a_n \neq 0$, kerrointa a_n sanotaan polynomin $f(x)$ *johtavaksi kertoimeksi* ja lukua n sanotaan polynomin $f(x)$ *asteeksi (degree)*. Polynomin asteesta käytetään merkintää $\deg f(x)$.

Polynomia $f(x)$ sanotaan *pääpolynomiksi (monic polynomial)*, jos sen johtava kerroin on renkaan R ykkösalkio.

Yllä on määritelty polynomin johtava kerroin ja aste kaikille nollapolynomista 0_R eroaville polynomeille $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. Nollapolynomin asteeksi sovitaan $\deg(0_R) = -\infty$. Tässä $-\infty$ ajatellaan lukuna, joka on pienempi kuin kaikki reaaliluvut.

Lause. Olkoon $(R,+,\cdot)$ kokonaisalue. Silloin $(R[x],+,\cdot)$ on kokonaisalue ja kaikilla $f(x), g(x) \in R[x]$ on

$$\deg(f(x)g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x).$$

Lisäksi

$$\deg(f(x)+g(x)) \leq \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}.$$

Todistus. Sivun Polynomirengas lauseen mukaan $(R[x],+,\cdot)$ on kommutatiivinen. Olkoot $f(x), g(x) \in R[x]$ ja olkoon polynomin $f(x)$ johtava kerroin a_n ja polynomin $g(x)$ johtava kerroin b_m. Koska $(R,+,\cdot)$ on kokonaisalue, on $a_nb_m \neq 0_R$. Täten tulopolynomissa $f(x)g(x)$ esiintyvä korkeinta astetta oleva termi on $a_nb_mx^{n+m}$. Tulopolynomi on siis eri kuin nollapolynomi, joten $(R[x],+,\cdot)$ on kokonaisalue ja lisäksi tulopolynomin aste toteuttaa väitteen yhtälön.

Jos ainakin toinen polynomeista $f(x)$ ja $g(x)$ on nollapolynomi, on myös tulopolynomi $f(x)g(x) = 0_R$ ja silloin yhtälö $\deg(f(x)g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$ pitää paikkansa, sillä molemmat puolet ovat $-\infty$.

Jätetään lauseen loppuosa harjoitukseksi. $\square$

Linkit:
Polynomirengas
Esimerkkejä polynomirenkaista
Kokonaisalue