Polynomien jaollisuus

Oletetaan nyt, että polynomien kertoimet kuuluvat kuntaan $(K, +, \cdot)$. Ensimmäiseksi tietysti tulee mieleen, onko polynomirengas $(K[x], +, \cdot)$ kunta. Vastaus tähän on kielteinen. Nimittäin polynomilla $f(x) \in K[x]$ on käänteisalkio vain ja ainoastaan jos $f(x)$ on nollapolynomista eroava vakiopolynomi. Tämä nähdään käyttämällä sivun Polynomin aste lausetta. Oletetaan, että $g(x) \in K[x]$ on polynomin $f(x)$ käänteialkio. Silloin $f(x)g(x) = 1_K$, joten edellä mainitun lauseen mukaan $0 = \deg(f(x)g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$. Koska polynomin aste on aina vähintään nolla tai se on $-\infty$, niin saadusta yhtälöstä seuraa, että $\deg f(x) = \deg g(x) = 0$ eli molemmat polynomit ovat nollapolynomista eroavia vakiopolynomeja.

Sivun Polynomin aste lauseen mukaan polynomirengas $(K[x], +, \cdot)$ on kokonaisalue, mutta ei siis kunta. Tämän renkaan rakenne on siis sama kuin kokonaislukujen renkaankin $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$; se on kokonaisalue, mutta ei kunta. Polynomeille yli kunnan K saadaankin samanlainen jaollisuusteoria kuin kokonaisluvuille.

Määritelmä. Olkoon $(K[x], +, \cdot)$ polynomirengas yli kunnan K ja $a(x), b(x) \in K[x]$. Jos on olemassa sellainen polynomi $c(x) \in K[x]$, että $a(x) = b(x)c(x)$, niin sanotaan, että $a(x)$ on *jaollinen* polynomilla $b(x)$. Tätä merkitään $b(x) \mid a(x)$. Voidaan sanoa myös $b(x)$ *jakaa* polynomin $a(x)$, $b(x)$ on polynomin $a(x)$ *tekijä*, tai $a(x)$ on polynomin $b(x)$ *monikerta*.

Polynomien yli kunnan K jaollisuusrelaatiolla on useita samoja ominaisuuksia kuin kokonaisluvuilla. Esimerkiksi aina $a(x) \mid a(x)$ ja

$$\begin{array}{ll} \text{jos } a(x) \mid b(x) \text{ ja } b(x) \mid c(x), & \text{niin} \quad a(x) \mid c(x), \\ \text{jos } a(x) \mid b(x) \text{ ja } a(x) \mid c(x), & \text{niin} \quad a(x) \mid (b(x) + c(x)). \end{array}$$

Eräät ominaisuudet ovat hieman toisenlaisia. Esimerkiksi

$$\text{jos } a(x) \mid b(x) \text{ ja } b(x) \mid a(x), \text{ niin } a(x) = k \cdot b(x), \text{ missä } k \in K \setminus \{0_K\}.$$

Nimittäin oletuksesta seuraa, että joillain polynomeilla $c(x)$ ja $d(x) \in K[x]$ on $a(x) = c(x)b(x)$ ja $b(x) = d(x)a(x)$, joten $a(x) = c(x)d(x)a(x)$. Koska $K[x]$ on kokonaisalue, siinä on voimassa supistamissääntö, joten saadaan $1_K = c(x)d(x)$. Kuten sivun alussa huomattiin tästä seuraa, että $c(x), d(x) \in K \setminus \{0_K\}$. Tästä puolestaan seuraa väite.

Linkit:

Polynomirengas

Polynomin aste

Jaollisuus ja alkuluvut

Esimerkkejä polynomirenkaista

Ryhmän perusominaisuuksia