Esimerkkejä polynomirenkaista

Esimerkki. Polynomirenkaassa yli reaalilukujen $\mathbb{R}$ pätee, että $(x+1) \nmid (x^2+1)$. Jäännösluokkien modulo 2 muodostamassa polynomirenkaassa $\mathbb{Z}_2[x]$ on $(x+\overline{1}) \mid (x^2+\overline{1})$, sillä $x^2+\overline{1} = (x+\overline{1})^2$.

Koska polynomilla x^2+1 ei ole nollakohtaa reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$, niin se on jaoton yli renkaan $(\mathbb{R},+,\cdot)$. Renkaassa $(\mathbb{Z}_2,+,\cdot)$ polynomilla $x^2+\overline{1}$ on kaksinkertainen nollakohta $\overline{1}$, joten se ei ole jaoton yli renkaan $\mathbb{Z}_2$. Myös kompleksilukujen renkaassa $(\mathbb{C},+,\cdot)$ polynomi x^2+1 hajoaa tekijöihin, nimittäin $x^2+1 = (x+i)(x-i)$.

Esimerkki. $(\mathbb{Z}_5,+,\cdot)$ on kunta, koska luku 5 on alkuluku. Sovelletaan jakoalgoritmia polynomirenkaan $(\mathbb{Z}_5[x],+,\cdot)$ polynomeihin $a(x) = \overline{3}x^2+\overline{1}$ ja $b(x) = \overline{2}x+\overline{3}$. Huomataan ensin, että $\overline{2}^{-1} = \overline{3}$, sillä $\overline{2}\cdot\overline{3} = \overline{6} = \overline{1}$. Saadaan

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{\overline{3}}{\overline{2}}x\cdot\overline{2}x+\overline{1} = \overline{3}\cdot\overline{3}x(\overline{2}x+\overline{3}-\overline{3})+\overline{1} = \overline{4}x(\overline{2}x+\overline{3})+\overline{3}x+\overline{1} \\ &= \overline{4}xb(x)+\frac{\overline{3}}{\overline{2}}(\overline{2}x+\overline{3}-\overline{3})+\overline{1} = (\overline{4}x+\overline{4})b(x)+\overline{3}\cdot\overline{3}\cdot(-\overline{3})+\overline{1} = (\overline{4}x+\overline{4})b(x)+\overline{4}. \end{aligned}$$

Siis $q(x) = \overline{4}x+\overline{4}$ ja $r(x) = \overline{4}$.

Esimerkki. Olkoon $x^4+2x^2+1 = (x^2+1)^2$ polynomi yli reaalilukujen kunnan. Polynomilla ei ole nollakohtaa joukossa $\mathbb{R}$, sillä x^2+1 on jaoton yli renkaan $(\mathbb{R},+,\cdot)$. Polynomi x^4+2x^2+1 ei kuitenkaan ole jaoton, vaikkei sillä nollakohtaa joukossa $\mathbb{R}$ olekaan.

Esimerkki. Tutkitaan onko polynomi $x^3+\overline{3}x+\overline{2}$ jaoton yli kuntien $(\mathbb{Z}_3,+,\cdot)$ ja $(\mathbb{Z}_5,+,\cdot)$. Koska polynomi on astetta kolme, se ei ole jaoton, jos polynomilla on jokin nollakohta tutkittavassa kunnassa.

Kunnassa $\mathbb{Z}_3[x]$ on $x^3+\overline{3}x+\overline{2} = x^3+\overline{2}$. Taulukoidaan polynomin arvot kaikilla kunnan $(\mathbb{Z}_3,+,\cdot)$ alkioilla. Saadaan alla oleva vasemmanpuoleinen taulukko. Koska polynomilla on nollakohta $x = \overline{1}$, se on jaollinen polynomilla $x-\overline{1}$ yli kunnan $\mathbb{Z}_3$.

Taulukoidaan vastaavasti polynomin $x^3+\overline{3}x+\overline{2}$ arvot yli kunnan $(\mathbb{Z}_5,+,\cdot)$. Saadaan oikeanpuoleinen taulukko. Koska polynomilla nyt ei ole nollakohtaa, se on jaoton yli kunnan $\mathbb{Z}_5$.

x	$x^3+\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{1}$

x	$x^3+\overline{3}x+\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$
$\overline{2}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$
$\overline{4}$	$\overline{3}$

Linkit:
Esimerkkejä kunnista
Polynomirengas
Polynomin aste
Polynomien jaollisuus
Polynomien jakoalgoritmi
Polynomin nollakohdat