Polynomirenkaan jäännösluokkarenkaasta

Olkoon $(K,+,\cdot)$ kunta ja $p(x)$ polynomirenkaan $(K[x],+,\cdot)$ jaoton polynomi. Jäänösluokkarengas $(K[x]/<p(x)>,+,\cdot)$ on kunta kuten todettiin sivulla Jaottomat polynomit ja kunnat. Millainen kunta $K[x]/<p(x)>$ on?

Merkitään $I=<p(x)>$ ja $d=\deg p(x)$. Kuten kaikki jäännösluokkarenkaat voidaan $K[x]/I$ esittää muodossa

$$K[x]/I=\{k(x)+I \mid k(x)\in K[x]\}=\{k(x)+I \mid k(x)\in D\},$$

missä D on jokin jäännösluokkien edustajisto. Polynomit $k_1(x)$ ja $k_2(x)$ kuuluvat samaan jäännösluokkaan jos ja vain jos $k_1(x)-k_2(x)$ on jaollinen polynomilla $p(x)$. Jakoalgoritmin perusteella tästä seuraa, että jäännösluokkien edustajistoksi D voidaan valita

$$D=\{r(x)\in K[x] \mid \deg r(x)<d\}.$$

Täten

$$\begin{aligned} K[x]/I &= \{r(x)+I \mid r(x)\in K[x],\ \deg r(x)<d\} \\ &= \{a_0+a_1x+\cdots+a_{d-1}x^{d-1}+I \mid a_i\in K,\ i=1,\ldots,d-1\} \end{aligned}$$

Jos $r_1(x)+I$ ja $r_2(x)+I$ ovat kaksi jäännösluokkaa, niin

$$\begin{aligned} (r_1(x)+I)+(r_2(x)+I) &= r_1(x)+r_2(x)+I, \\ (r_1(x)+I)\cdot(r_2(x)+I) &= (r_1(x)r_2(x))+I. \end{aligned}$$

Tulopolynomi $r_1(x)r_2(x)$ palautetaan muotoon $a_0+a_1x+\cdots+a_{d-1}x^{d-1}$ vähentämällä siitä sopiva polynomin $p(x)$ monikerta.

Linkit:

Jaottomat polynomit ja kunnat

Jäännösluokkarengas

Polynomien jakoalgoritmi