

Vakiokertoiminen epähomogeeninen yhtälö

Kertalukua n oleva lineaarinen vakiokertoiminen epähomogeeninen differentiaaliyhtälö on

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = R(x),$$

missä kertoimet a_k ovat vakioita. Oikeanpuolen funktio $R(x)$ voi olla millainen tahansa.

Yleisen teorian mukaan epähomogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu saadaan summana vastaavan homogeeniyhtälön yleisestä ratkaisusta ja epähomogeeniyhtälön jostakin yksittäisratkaisusta. Viimeksi mainittu voidaan hakea esimerkiksi vakioiden varioinnilla.

Jos kuitenkin kyseessä on vakiokertoiminen yhtälö ja funktio $R(x)$ on sopivaa tyyppiä, voidaan yksittäisratkaisu hakea helpommin yritettä käyttäen.

Millainen yrite on syytä valita vastaamaan tietyn tyyppistä funktiota $R(x)$, ilmenee seuraavasta taulukosta. Symbolit A, B, A_k ovat yrittteen parametreja, jotka on määrättävä siten, että yrite toteuttaa yhtälön; α, β, ω ja n ovat funktion $R(x)$ lausekkeessa olevia vakioita.

$R(x)$	yrite	
$\alpha e^{\beta x}$	$Ae^{\beta x}$ $Axe^{\beta x},$ $Ax^2e^{\beta x},$ etc.	jos $e^{\beta x}$ on homogeeniyhtälön ratkaisu jos myös $xe^{\beta x}$ on homogeeniyhtälön ratkaisu
$\alpha \sin \omega x$ $\beta \cos \omega x$ $\alpha \sin \omega x + \beta \cos \omega x$	$A \sin \omega x + B \cos \omega x$ $Ax \sin \omega x + Bx \cos \omega x,$ etc.	jos $\sin \omega x$ ja $\cos \omega x$ ovat homog.yht. ratkaisuja etc.
polynomi astetta n	polynomi astetta $n,$ ts. $\sum_{k=0}^n A_k x^k$ polynomi astetta $n+1,$ jos homog.yht. ratkaisuna on vakio polynomi astetta $n+2,$ jos homog.yht. ratkaisuna on 1. asteen polynomi etc.	

Kutakin funktion $R(x)$ muotoa vastaten on ensimmäisellä rivillä normaalisti sovellettava yrittteen muoto. Jos kuitenkin tämänmuotoinen lauseke sattuu olemaan homogeeniyhtälön ratkaisu, ei se voi toteuttaa epähomogeeniyhtälöä millään parametrien valinnalla. Polynomin tapauksessa näin käy, jos karakteristisella yhtälöllä on juurena $r = 0$, eksponenttifunktion tapauksessa, jos juurena on $r = \beta$, ja sini-kosini-tapauksessa, jos juurina ovat $r = \pm \omega i$. Näissä tapauksissa on yritteeseen lisättävä kertoimeksi x . Jos juuret ovat kaksinkertaisia, otetaan kertoimeksi x^2 jne.

Taulukkoa voisi jatkaakin, mutta esitetyt tapaukset ovat tärkeimmät. Ne tulevat esiin erilaisissa sovelluksissa, mm. värähtelyprobleemoissa.

Että em. yrittöt toimivat, ei ole itsestään selvää. Suorilla laskuilla voidaan kuitenkin osoittaa, että näin on.

Linkkejä

[epähomogeeninen vakiokertoaminen yhtälö, esimerkki](#)
[epähomogeenisen yhtälön ratkaisujoukko](#)
[vakiokertoaminen homogeeniyhtälö](#)
[ensimmäisen kertaluvun epähomogeeninen yhtälö yleensä](#)
[toisen kertaluvun epähomogeeninen yhtälö yleensä](#)
[vaihtovirtapiirin pakotettu värähtely / mma](#)
[vaihtovirtapiirin resonanssi / mma](#)
[monisilmukainen vaihtovirtapiiri / mma](#)
[vaihtovirtapiirin pakotettu värähtely / mpl](#)
[vaihtovirtapiirin resonanssi / mpl](#)
[monisilmukainen vaihtovirtapiiri / mpl](#)

Simo K. Kivelä 10.4.2001