Toisen kertaluvun lineaarinen homogeeninen yhtälö: toinen perusratkaisu yleisellä menettelyllä

Toisen kertaluvun lineaarisessa ja homogeenisessa differentiaaliyhtälössä

$$(x+1)y'' - xy' - y = 0$$

on kerroinfunktioiden $x+1$, $-x$ ja -1 summa $= 0$, jolloin sillä on ratkaisuna ainakin $y = e^x$.

Yleiseen ratkaisuun tarvitaan kuitenkin kaksi lineaarisesti riippumatonta yksittäisratkaisua. Kun toinen tiedetään, toinen voidaan aina etsiä yritteellä, jossa tunnettu ratkaisu kerrotaan tuntemattomalla funktiolla; tässä tapauksessa $y = u(x)e^x$.

Sijoittamalla yrite yhtälöön saadaan

$$(x+1)(u'' + 2u' + u)e^x - x(u' + u)e^x - ue^x = 0,$$

mikä sievenee muotoon

$$(x+1)(u'' + 2u') - xu' = 0.$$

Jäljelle jää siis vain funktion u derivaattoja, funktio itse supistuu pois. Menettelyssä käy aina tällä tavoin.

Saatua yhtälöä vastaava normaaliryhmä on

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = v, \\ \dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{x+2}{x+1}\,v. \end{cases}$$

Jälkimmäinen yhtälö on separoituva ja antaa

$$v = \frac{e^{-x}}{x+1},$$

jolloin u saadaan yhdellä lisäintegroinnilla:

$$u = \int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}\,dt.$$

Integraali ei ole lausuttavissa alkeisfunktioiden avulla, mutta kyllä esimerkiksi symbolisten laskentaohjelmien tuntemien funktioiden avulla.

Toinen lineaarisesti riippumaton perusratkaisu on tällöin

$$y = e^x \int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}\,dt$$

ja homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu

$$y = C_1 e^x + C_2 e^x \int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}\,dt.$$

Koska integroitavalla funktiolla on nimittäjän nollakohta $t = -1$, on edellä esitetty ratkaisu pätevä vain alueessa $x > -1$, jolloin ei jouduta integroimaan nollakohdan yli. Differentiaaliyhtälön ratkaisua voidaan tarkastella myös alueessa $x < -1$, mutta tällöin on integraalin alaraja otettava tästä alueesta. (Alaraja sinänsä on mielivaltainen, koska etsitään vain jotakin sopivaa funktiota u.) Ratkaisuista vain C_1e^x jatkuu kohdan $x = -1$ yli; kaikkien muiden osalta tarkastelualue jakautuu tässä pisteessä kahtia. Tämä näkyy myös siten, että normaalimuodossa olevan yhtälön kerroinfunktioille $x = -1$ on nimittäjän nollakohta.

Linkkejä

toisen kertaluvun homogeeninen yhtälö
ensimmäiseen kertalukuun palautuva toisen kertaluvun yhtälö (kohta 1)
funktioiden lineaarinen riippumattomuus

Simo K. Kivelä 26.04.2001