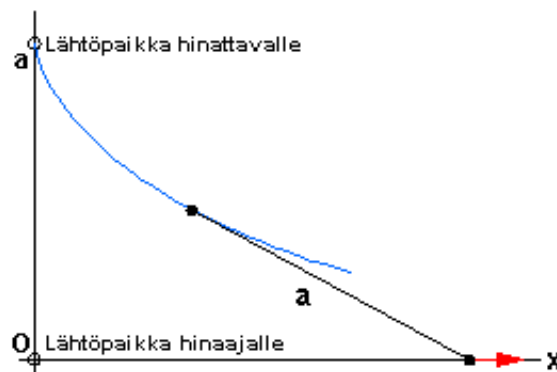


Hinaaja

Tarkastellaan tilannetta, missä alus hinaa toista joustamattoman köyden tai tangon avulla. Tanko tai köysi on kiinnitetty molemmista päistään kitkattomien nivelten avulla. Lähtöasetelmana olkoon tilanne, jossa hinaaja sijaitsee origossa ja hinattava etäisyydellä a y-akselilla. Hinaajan lähtee liikkeelle x-akselin suuntaan.



Koska hinausetäisyys pysyy vakiona ($= a$), saadaan Pythagoraan lauseella johdettua tilanteen liikeyhtälö:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - y^2}}.$$

Tarkastellaan hinattavan kulkemaa reittiä.

Laskujen aluksi on syytä hävittää mahdollisista aiemmista laskuista jääneet muuttujat.

```
Remove["Global`*"]
```

Olkoon hinausköyden pituus

```
a = 1
```

```
1
```

Määritellään differentiaaliyhtälö:

```
yht = y'[x] == -y[x] / Sqrt[a^2 - y[x]^2]
```

$$y'[x] = -\frac{y[x]}{\sqrt{1 - y[x]^2}}$$

Luonnollinen alkuehto olisi $y(0) = a$, mutta tämä on yhtälössä nimittäjän nollakohta eikä numeerinen ratkaiseminen onnistu. Pieni huijauksenomainen muutos alkuehdossa auttaa:

```
alkuehto = y[0.000001] == a - 0.00000000001
```

```
y[1. × 10-6] == 1.
```

Ratkaistaan differentiaaliyhtälö:

```
rtk = NDSolve[{yht, alkuehto}, y[x], {x, 0.000001, 20}]
```

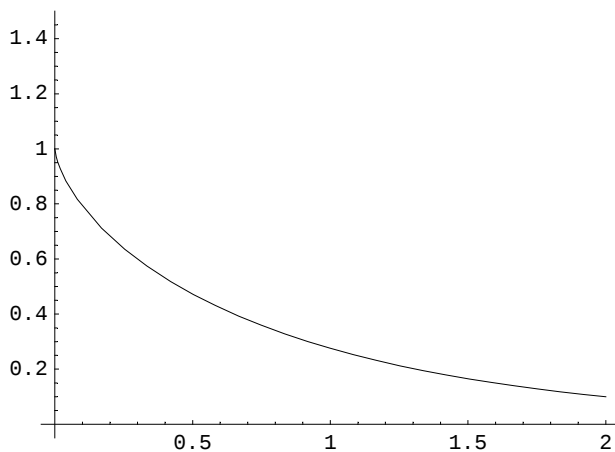
```
{{y[x] → InterpolatingFunction[{{1. × 10-6, 20.}}, <>][x]}}
```

Muokataan tulos käyttökelpoisempaan muotoon ja piirretään ratkaisun kuvaaja:

```
kaari = y[x] /. First[rtk]
```

```
InterpolatingFunction[{{1. × 10-6, 20.}}, <>][x]
```

```
Plot[kaari, {x, 0.000001, 2}, PlotRange -> {-0.05, 1.5}, AspectRatio -> Automatic]
```



- Graphics -

Saatua käyrää kutsutaan nimellä *traktrix*. Sitä voidaan käyttää missä tahansa jäykissä veto-, työntö- tai seuraustilanteissa.

Tehtäviä

Jos vetäjä etenee jatkuvasti samaan suuntaan, alussa eri suuntaan kulkenut hinattava saavuttaa täsmälleen saman kulkusuunnan vasta äärettömyydessä. Tarkastele tilannetta, missä vene lähtee vetämään lautaa 50 metrin joustamattoman hinausköyden avulla edellä kuvatulla tavalla. Kuinka pitkään hinausta pitää suorittaa, ennen kuin lautan poikkeama suoraan etenevän veneen kulkusuunnan määrittämästä suorasta on alle 5 cm?

Tutki, voidaanko probleeman differentiaaliyhtälö ratkaista Mathematican DSolve-komennolla. Voidaanko ratkaisu lausua alkeisfunktioiden avulla? Onko yhtälö ratkaistavissa käsin laskemalla?

Ratkaise edellä tarkasteltu probleema valitsemalla y riippumattomaksi muuttujaksi, jolloin hinattavan reittiä kuvaava tuntematon funktio on $x(y)$. Muodosta tilannetta vastaava differentiaaliyhtälö alkuehtoineen ja ratkaise se numeerisesti. Joudutaanko jossakin kohdassa vastaavaan ongelmaan kuin edellä alkuehtoa asetettaessa?

Linkit

separoituva yhtälö

JP & SKK 10.05.2001