

Vakiokertoimisen lineaariyhtälön karakteristisen yhtälön useampikertaiset juuret

Kiinnitetään aluksi kolme vakiota.

Tarkastelun kohteena olkoon kertalukua n oleva vakiokertoiminen homogeeninen differentiaaliyhtälö:

$$n = 3$$

$$3$$

Tämän karakteristinen polynomi on myös astetta n . Polynomilla olkoon nollakohta r , jonka kertaluku on p ($\leq n$):

$$p = 2$$

$$2$$

Tarkoituksena on tutkia, onko $y = x^k e^{rx}$ yhtälön ratkaisu, kun $k = 0, 1, 2, \dots, q$ (luontevimmin $q \geq p$):

$$q = 3$$

$$3$$

Vakiokertoimisten yhtälöiden teorian mukaan näin pitäisi olla arvoon $k = p - 1$ saakka.

Differentiaaliyhtälö on

$$\text{diffyht} = \text{Sum}[a_k D[y[x], \{x, k\}], \{k, 0, n\}] == 0$$

$$a_0 y[x] + a_1 y'[x] + a_2 y''[x] + a_3 y^{(3)}[x] == 0$$

Karakteristinen yhtälö saadaan sijoittamalla yhtälöön yrite $y = e^{rx}$ ja jakamalla sijoittamisen jälkeen eksponenttitekijä pois. Samaan tulokseen päästään korvaamalla differentiaaliyhtälössä derivaatat vastaavilla muuttujan r potensseilla:

$$\text{karaktyht} = \text{diffyht} /. \text{Table}[D[y[x], \{x, k\}] \rightarrow r^k, \{k, 0, n\}]$$

$$a_0 + r a_1 + r^2 a_2 + r^3 a_3 == 0$$

Luku r on tämän p -kertainen juuri, jos ja vain jos se on myös karakteristisen polynomin derivaattojen nollakohta kertalukua $p - 1$ saakka. Kertaluku p voidaan siten karakterisoida seuraavilla ehdoilla:

```
ehdot = Table[D[karaktyht, {r, k}], {k, 0, p - 1}]
```

```
{a0 + r a1 + r2 a2 + r3 a3 == 0, a1 + 2 r a2 + 3 r2 a3 == 0}
```

Sijoitetaan ratkaisut $y = x^k e^{rx}$ ($0 \leq k \leq q$) differentiaaliyhtälöön ja tutkitaan, toteutuuko tämä, kun r täyttää edellä asetetut ehdot:

```
sij = Table[diffyht /. y -> Function[x, x^k Exp[r x]], {k, 0, q}]
```

```
{er x a0 + er x r a1 + er x r2 a2 + er x r3 a3 == 0,
 er x x a0 + (er x + er x r x) a1 + (2 er x r + er x r2 x) a2 + (3 er x r2 + er x r3 x) a3 == 0,
 er x x2 a0 + (2 er x x + er x r x2) a1 + (2 er x + 4 er x r x + er x r2 x2) a2 +
 (6 er x r + 6 er x r2 x + er x r3 x2) a3 == 0, er x x3 a0 + (3 er x x2 + er x r x3) a1 +
 (6 er x x + 6 er x r x2 + er x r2 x3) a2 + (6 er x + 18 er x r x + 9 er x r2 x2 + er x r3 x3) a3 == 0}
```

```
Simplify[sij, ehdot]
```

```
{True, True, er x (a2 + 3 r a3) == 0, er x (x a2 + (1 + 3 r x) a3) == 0}
```

Yhtälön toteuttavia ratkaisuja näyttää todellakin olevan nollakohdan r kertaluvun p mukainen määrä, kuten teorian mukaan pitääkin.

Polynomiehtojen käsittelyyn symboliset laskentajärjestelmät kuten Mathematica käyttävät ns. *Gröbnerin kantoja*. Probleeman monimutkaistuesssa näiden käyttö tulee kuitenkin raskaaksi hyvin nopeasti. Vaikka edellä oleva lasku voidankin periaatteessa laskea millä tahansa arvoilla n , p , q , laskenta alkaa arvojen kasvaessa vaatia aikaa ja muistia todella paljon. Lukija kokeilkoon!

Linkit

[vakiokertoiminen homogeeniyhtälö](#)

SKK 27.04.2001