

Radioaktiivinen hajoaminen

Radioaktiivinen hajoaminen on ilmiö, jossa aktivoitunut, epästabiili atomiydin vapauttaa energiaansa α -, β - tai γ -säteilyn kautta. Hiukkassäteilyn eli α - ja β -säteilyn tapauksessa samalla muuttuu myös atomiytimen sisäinen kokoonpano. Tällaisen hajoamisen kautta alkuaine muuttuu toiseksi.

Erityisen paljon tutkittuja ovat ydinreaktorien polttoainesauvoihin jäävien radiokatiivisten aineiden hajoamisketjut. Polttoainesauvoista muodostuva pitkään radioaktiivinen jäte aiheuttaa huolestumista, koska sauvoissa olevien radioaktiivisten aineiden hajoaminen on niin hidasta, että säteilyongelma säilyy luonnollisen hajoamisen kautta akuuttina vuosituhansia. Tämä esimerkki käsittelee radiumin Ra^{228} hajoamista sekä yksinkertaistettua radiumin Ra^{224} ytimen hajoamisketjua lyijyksi Pb^{208} . Tämä ketju muodostaa loppuosan varsin tärkeästä toriumin Th^{232} hajoamisketjusta.

Jokaiselle radioaktiiviselle atomiytimelle on olemassa tietty todennäköisyys sen hajoamiseen määrätyllä aikavälillä. Hajoamisen kautta syntyvien tytäratomien lukumäärä on siten suoraan verrannollinen aktiivisten atomiytimien lukumäärään. Niinpä voidaan määrittää radioaktiivinen hajoamislaki

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N,$$

missä N on radioaktiivisten ytimien lukumäärä, t on aika ja λ radioaktiivinen hajoamisvakio, joka määrittää todennäköisyyden atomiytimen spontaanille hajoamiselle annetulla ajanhetkellä. Hajoamislain perusteella voidaan määrittää ns. puoliintumisaika $T_{1/2}$, joka ilmoittaa sen aikayksikön, jossa puolet alkuperäisistä ytimistä on hajonnut. Integroimalla saadaan hajoamattomien ytimien lukumäärälle

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

jossa N_0 on ydinten lukumäärä ajanhetkellä $t = 0$. Ratkaisemalla yhtälö $N = \frac{1}{2} N_0$ saadaan puoliintumisajalle $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$. Tällöin hajoamislaille pätee

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{\ln 2}{T_{1/2}} N.$$

Yksinkertainen hajoamistilanne

Radium Ra^{228} on yksi väliydin pitkäaktiivisen Th^{232} :n hajoamisketjussa. Ra^{228} :n puoliintumisaika on 5,75 vuotta sen hajotessa lyhytaktiiviseksi Ac^{228} -ytimeksi. Lasketaan kuinka paljon 100 kg:sta Ra^{228} :sta on jäljellä 70 vuoden kuluttua.

Laskujen aluksi on syytä hävittää mahdollisista aiemmista laskuista jääneet muuttujat.

Remove ["Global`*"]

Ytimien hajoamista kuvaava differentiaaliyhtälö.

```
yht = n'[t] == -λ n[t]
```

```
n'[t] == -λ n[t]
```

Alkuehdon määrittää tilanne, jossa on vain Ra^{228} ytimiä. Lasketaan ainemäärä kilogrammoissa.

```
alkuehto = n[0] == 100
```

```
n[0] == 100
```

Ratkaistaan differentiaaliyhtälö.

```
rtk = DSolve[{yht, alkuehto}, n[t], t]
```

```
{{n[t] -> 100 e^{-t λ}}}
```

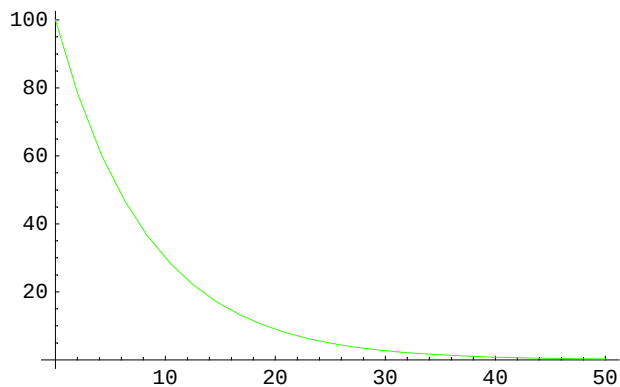
Sievennetään tulos ja sijoitetaan siihen hajoamisvakio. Käytetään aikayksikkönä vuosia.

```
ainemaara = n[t] /. First[rtk] /. λ -> Log[2] / 5.75
```

```
100 e^{-0.120547 t}
```

Piirretään kuvaaja ainemäärän kehitykselle ajan fuktiona 50 vuoden aikajaksolla.

```
Plot[ainemaara, {t, 0, 50}, PlotStyle -> Hue[.3]]
```



- Graphics -

70 vuoden jälkeen jäljelle jääneen ainemäärän paino kilogrammoissa selviää sijoittamalla ajaksi 70 vuotta.

```
jaljella = ainemaara /. t -> 70
```

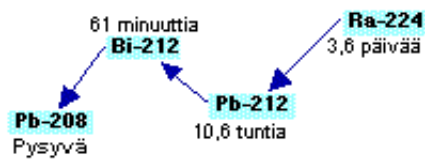
```
0.0216415
```

Tuloksena on siis 21,6 grammaa Radium Ra^{228} :aa.

Hajoamisketju

Myös Radium Ra^{224} on väliydin Th^{232} :n hajoamisketjussa. Hajoamisketju Ra^{224} ytimeistä eteenpäin sisältää useita lyhytaikaisia ja muutamia pitkäaikaisia väliytimiä ennen hajoamista pysyväksi lyijy-ytimeksi Pb^{208} . Tarkastelemme nyt hajoamista väliytimet Pb^{212} ja Bi^{212} huomioiden. Puoliintumisajat ytimien hajoamisille ovat seuraavat:

$\text{Ra}^{224} \rightarrow \text{Pb}^{212} : T_{1/2, \text{Ra}^{224}} = 3.6 \text{ päivää}$
 $\text{Pb}^{212} \rightarrow \text{Bi}^{212} : T_{1/2, \text{Pb}^{212}} = 10.6 \text{ tuntia}$
 $\text{Bi}^{212} \rightarrow \text{Pb}^{208} : T_{1/2, \text{Bi}^{212}} = 61 \text{ minuuttia}$



Muodostetaan hajoamisketjua kuvaavat differentiaaliyhtälöt:

$$\begin{aligned}
 N_1' &= -\lambda_1 N_1 \\
 N_2' &= \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \\
 N_3' &= \lambda_2 N_2 - \lambda_3 N_3 \\
 N_4' &= \lambda_3 N_3
 \end{aligned}$$

jossa N_1 on Ra^{224} -atomien lukumäärä ja λ_1 vastaavasti Ra^{224} :n hajoamisvakio. Vastaavasti alaindeksi '2' viittaa Pb^{212} :n, '3' Bi^{212} :n ja '4' Pb^{208} :n vastaaviin suureisiin. Ratkaistaan hajoamisketjun differentiaaliyhtälöryhmä ja piirretään kuvaajat ytimien lukumäärille ajan funktioina.

Ytimien hajoamisia ja toisikseen muuttumista kuvaa seuraava normaaliryhmä.

```

ryhma1 = {n1'[t] == -λ1 * n1[t], n2'[t] == λ1 * n1[t] - λ2 * n2[t],
          n3'[t] == λ2 * n2[t] - λ3 * n3[t], n4'[t] == λ3 * n3[t]}

{n1'[t] == -λ1 n1[t], n2'[t] == λ1 n1[t] - λ2 n2[t],
 n3'[t] == λ2 n2[t] - λ3 n3[t], n4'[t] == λ3 n3[t]}

```

Ongelman tuntemattomat funktiot ovat ketjun eri alkuaineiden ydinten lukumäärät.

```

tuntemattomat1 = {n1[t], n2[t], n3[t], n4[t]}

{n1[t], n2[t], n3[t], n4[t]}

```

Alkuehdon määrittää tilanne, jossa on 10^{16} kpl Ra^{224} ytimiä (n. $3,72 \times 10^{-6}$ g):

```

alkuehto1 = {n1[0] == 10^16, n2[0] == 0, n3[0] == 0, n4[0] == 0}

{n1[0] == 10000000000000000, n2[0] == 0, n3[0] == 0, n4[0] == 0}

```

Hajoamisvakiot ovat

```

λ1 = Log[2] / 3.6
λ2 = Log[2] / (10.6 / 24)
λ3 = Log[2] / (61. / 60 / 24)

0.192541

1.56939

16.3628

```

Ratkaistaan differentiaaliyhtälöryhmä ja sievennetään tulokset:

```

rtk1 = DSolve[Flatten[{ryhma1, alkuehto1}], tuntemattomat1, t]

{{n1[t] -> 1. × 1016 e-0.192541 t,
 n2[t] -> e-19.6941 t (-1.39842 × 1015 e18.1247 t + 1.39842 × 1015 e19.5016 t),
 n3[t] -> e-34.4876 t (1.26319 × 1013 e18.1247 t - 1.48354 × 1014 e32.9182 t + 1.35722 × 1014 e34.295 t),
 n4[t] -> e-18.1247 t (-1.26319 × 1013 e1.76193 t +
 1.54677 × 1015 e16.5554 t - 1.15341 × 1016 e17.9322 t + 1. × 1016 e18.1247 t)}}

maarat1 = tuntemattomat1 /. First[rtk1] // Simplify;
maarat1 // TableForm

1. × 1016 e-0.192541 t
-1.39842 × 1015 e-1.56939 t + 1.39842 × 1015 e-0.192541 t
1.26319 × 1013 e-16.3628 t - 1.48354 × 1014 e-1.56939 t + 1.35722 × 1014 e-0.192541 t
1. × 1016 - 1.26319 × 1013 e-16.3628 t + 1.54677 × 1015 e-1.56939 t - 1.15341 × 1016 e-0.192541 t

```

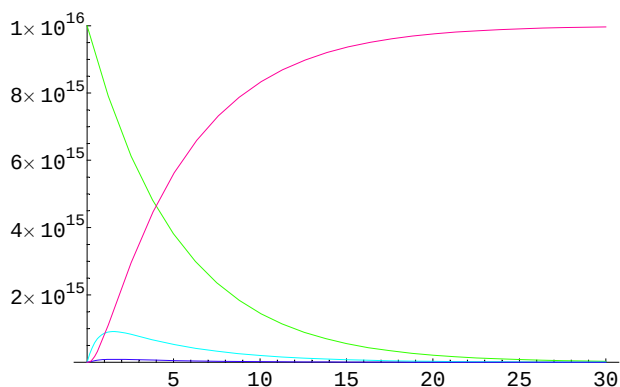
Piirretään kuva ainemäärien muuttumisesta ajan funktiona. Tarkasteltavana aikavälinä käytetään yhtä kuukautta.

```

<< Graphics`Graphics`

DisplayTogether[Plot[maarat1[[1]], {t, 0, 30}, PlotStyle -> Hue[.3]],
 Plot[maarat1[[2]], {t, 0, 30}, PlotStyle -> Hue[.5]],
 Plot[maarat1[[3]], {t, 0, 30}, PlotStyle -> Hue[.7]],
 Plot[maarat1[[4]], {t, 0, 30}, PlotStyle -> Hue[.9]], PlotRange -> {0, 1016}]

```



- Graphics -

Lähtöytimien Ra^{224} (vihreä) hajoamisessa syntyy ensin turkoosilla merkittyjä Pb^{212} ytimiä jotka nopeasti hajoavat violetilla merkityiksi Bi^{212} ytimiksi. Niiden puoliintumisaika on kuitenkin niin lyhyt, että ne hajoavat hyvin nopeasti Pb^{208}

ytimiksi. Jo viidentoista päivän kuluttua lähtöhetkestä on jäljellä lähinnä vain vakaita punaisella piirrettyjä Pb^{208} ytimiä. Eniten niiden syntymistä hidastaa lähtöytimien verrattain lyhyt puoliintumisaika.

Tehtävä

Testaa puoliintumisaajan vaikutusta radioaktiivisessa hajoamisessa. Mikäli puolitat Ra^{228} :n puoliintumisaajan, kuinka paljon vähemmän ytimiä on jäljellä 4 puoliintumisaajan jälkeen verrattuna todelliseen tilanteeseen?

Mikäli haluat tutustua tarkemmin radioaktiivisiin hajoamisketjuihin, voit tutustua niihin Internetissä Uranium Information Centren kotisivuilla Australiassa. Loistava laskuri hajoamisketjujen simuloimiseksi löytyy Project Javan kotisivuilta, missä yksi ohjelmointikilpailutyö keskittyy hajoamisketjujen laskemiseen.

Linkit

[radiohiiliajoitus](#) (radahaj1.nb)
[differentiaaliyhtälöryhmä](#)
[vakiokertoiminen homogeeniyhtälö](#)

JP & SKK 04.05.2001