

Väestönkasvu

Populaation kehitystä voidaan usein kuvata differentiaaliyhtälöiden avulla. Tässä tarkastellaan yksinkertaista väestönkasvumallia, joka perustuu ihmispopulaation kehitykseen vakioympäristössä.

Kasvuyhtälö konstruoidaan seuraavalla logiikalla. Väestömäärän muutosta kuvaavaan yhtälöön vaikuttaa kaksi perustekijää, *syntyvyys* s_0 ja *kuolleisuus* k_0 . Olkoon väestömäärää ajanhetkellä t kuvaava funktio $N(t)$. Tällöin on voimassa differentiaaliyhtälö

$$\frac{dN(t)}{dt} = (s_0 - k_0) N(t),$$

ts. väestömäärän muutosnopeus on verrannollinen senhetkiseen väestömäärään verrannollisuuskertoimena syntyvyyden ja kuolleisuuden erotus. Yhtälö ratkeaa helposti, jolloin saadaan väestömäärän kasvulle eksponentiaalinen malli

$$N(t) = N_0 e^{rt},$$

missä $r = s_0 - k_0$ ja N_0 on populaation suuruus alkuhetkellä $t = t_0$. Eksponentiaalinen kasvu kuvaa populaation kehitystä yleensä vain olosuhteissa, missä ympäristön asettamat rajoitukset ovat vähäiset ja populaation kasvupotentiaali rajaton.

Tarkasteltaessa lähes mitä tahansa reaalista populaatiota, rajallinen ympäristö ja populaation itsensä aiheuttama lajin sisäinen kilpailu aiheuttavat kasvulle selkeät rajat. Kasvua rajoittava kilpailutekijä on yleensä kytketty populaatiotiheyteen. Niinpä ympäristön rajallista kantokykyä voidaan kuvata modifioimalla syntyvyyttä ja kuolleisuutta populaatiotiheyteen verrannollisella tekijällä. Tällöin

$$\frac{dN}{dt} = N [(s_0 - p_s N) - (k_0 + p_k N)],$$

missä p_s on populaatiotiheyden syntyvyyskerroin ja p_k on populaatiotiheyden kuolleisuuskerroin.

Kun populaatio saavuttaa maksimikokonsa $N_{\max}$, sanotaan, että se on saavuttanut ympäristön kantokyvyn rajan. Tällöin derivaatta on $= 0$ ja populaatiolle pätee

$$N_{\max} = K = \frac{s_0 - k_0}{p_s + p_k}.$$

Voidaan ajatella, että K on ympäristön kantokyky. Tällöin populaatiota koskeva differentiaaliyhtälö saa muodon

$$\frac{dN}{dt} = r \frac{N(K - N)}{K}.$$

Tämä voidaan helposti todeta (aluksi poistetaan vanhat muuttujat varmuuden vuoksi):

Remove["Global`*"]

r N (K - N) / K /. {r -> s0 - k0, K -> (s0 - k0) / (ps + pk)} // Simplify

-N (k0 + N pk + N ps - s0)

Lasketaan seuraavaksi yksinkertainen populaatioesimerkki, missä alkukantainen heimo alkaa vuonna 1000 jkr. asuttaa Tyynen valtameren Kolae-saarta omaa vakiintunutta traditiotaan ja elämäntapaa soveltaen. Olkoon heimolle tyypillinen kasvukerroin $r = 0.03$ ja Kolae-saaren kantokyvyn raja $K = 953$ asukasta.

Heimon populaatiota kuvaava yhtälö on

$$yht = n'[t] == r * n[t] (k - n[t]) / k$$

$$n'[t] == \frac{r (k - n[t]) n[t]}{k}$$

Valitaan alkuehto, joka kuvaa populaation kokoa asutuksen alkaessa:

$$alkuehto = n[0] == 10$$

$$n[0] == 10$$

Ratkaistaan differentiaaliyhtälöryhmä ja manipuloidaan tulos käyttökelpoiseen muotoon:

$$rtk = \text{DSolve}[\{yht, alkuehto\}, n[t], t]$$

Solve::ifun : Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found; use Reduce for complete solution information. [More...](#)

$$\left\{ \left\{ n[t] \rightarrow \frac{10 e^{r t} k}{-10 + 10 e^{r t} + k} \right\} \right\}$$

$$popul = n[t] /. \text{First}[rtk]$$

$$\frac{10 e^{r t} k}{-10 + 10 e^{r t} + k}$$

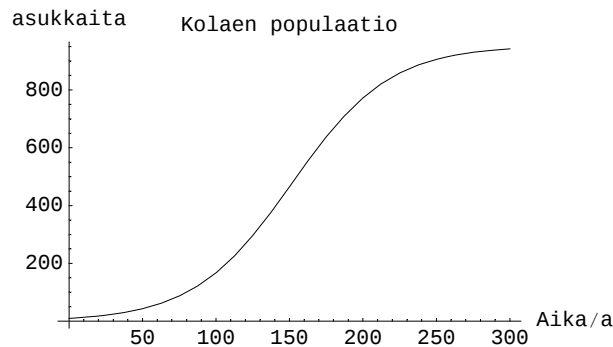
Sijoitetaan vakiot:

$$\text{numpopul} = \text{popul} /. \{r \rightarrow 0.03, k \rightarrow 953\}$$

$$\frac{9530 e^{0.03 t}}{943 + 10 e^{0.03 t}}$$

Piirretään kuva populaation kehityksestä ajan funktiona:

```
Plot[numpopul, {t, 0, 300},
  AxesLabel -> {"Aika/a", "asukkaita"}, PlotLabel -> "Kolaen populaatio"]
```



- Graphics -

Tuloksena on ns. s-kasvukäyrä, joka osoittaa saaren populaation vuonna 1300 jkr. jo varsin saturoituneeksi. Todellisuudessa vain harvoin ympäristöolot ovat niin tasaiset, että yllä lasketun kaltainen tasainen kasvukäyrä pääsisi syntymään. Tautiepidemiat, katovuodet yms. vaihtelevat tekijät muuttavat ympäristön kantokykyä ja kuolleisuustekijää merkittävästi jopa vuositasolla. Ihmispopulaatiossa lisäksi kehittyvä teknologia ja innovaatiot saattavat muuttaa ympäristötekijöiden vaikutuksia suuresti.

Tehtävä

Tarkastellaan tilannetta, missä heimon perinteet kannustaisivat jäseniä suurempiin perhekokoihin. Tällöin heimolle ominainen kasvukerroin onkin 4%. Kuinka monta vuotta kestää ennen kuin saaren asukasluku rikkoo 800 ihmisen rajan?

Linkit

[väestön kehitys muuttuvissa olosuhteissa](#) (vaestok2.nb)

[peto- ja saaliskanta](#) (petsaal.nb)

JP & SKK 09.05.2001