

Värähtelevä jousi

Jousen puristumista ja venymistä voidaan kuvata varsin yksinkertaisella matemaattisella mallilla. Kun jousi poikkeutetaan tasapainoasemastaan, se pyrkii palautumaan tasapainoasemaan *jousivoiman* vaikutuksesta. Tälle ns. *harmoniselle* voimalle pätee

$$F(x) = -kx,$$

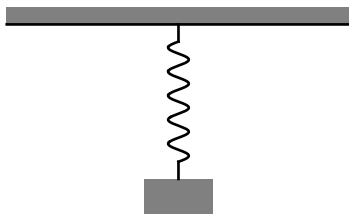
missä x on jousen poikkeama tasapainoasemasta ja k jouselle tyypillinen jousivakio. Jos toisaalta huomioidaan voiman jousisysteemiin aiheuttama kiihtyvyys, saadaan Newtonin lain avulla

$$F(x) = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx,$$

missä m on jouseen kiinnitetty massa. Näin on saatu jousen differentiaaliyhtälö.

Yhtälö pätee myös esimerkiksi katosta jousen varassa ripustetulle kappaleelle. Tulee kuitenkin huomata, että kyseinen malli pätee vain pienille poikkeamille x eikä se lainkaan mallinna poikittaista liikettä tai jousessa syntyvää kiertymää.

Otetaan tarkastelun kohteeksi oheisen kuvion mukainen systeemi, jossa kappale massaltaan m on liitetty kattoon jousella, jonka jousivakio on k . Jousi voi liikkua vain pystysuorassa suunnassa.



Laskujen aluksi on syytä hävittää mahdollisista aiemmista laskuista jääneet muuttujat.

```
In[1]:= Remove["Global`*"]
```

Kappaleen pystysuora paikkakoordinaatti x ilmoitetaan poikkeamana lepotilasta, ylöspäin positiivisena ja alaspäin negatiivisena. Systeemin liikeyhtälö on Newtonin lain mukainen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö:

```
In[2]:= yht = m x''[t] + k x[t] == 0
```

```
Out[2]:= k x[t] + m x''[t] == 0
```

Systeemiä tarkastellaan siten, että kappale sysätään hetkellä $t = 0$ liikkeelle lepotilasta antamalla sille alkunopeus.

```
In[3]:= alkuehdot = {x[0] == 0, x'[0] == 10}
```

```
Out[3]:= {x[0] == 0, x'[0] == 10}
```

Saatu differentiaaliyhtälö ratkaistaan Mathematican DSolve-komennolla ja sievennetään.

```
In[4]:= rtk = DSolve[Flatten[{yht, alkuehdot}], x[t], t]
```

```
Out[4]:= {{x[t] -> \frac{10 \sqrt{m} \sin\left[\frac{\sqrt{k} t}{\sqrt{m}}\right]}{\sqrt{k}}}}
```

```
In[5]:= liike = x[t] /. First[rtk]
```

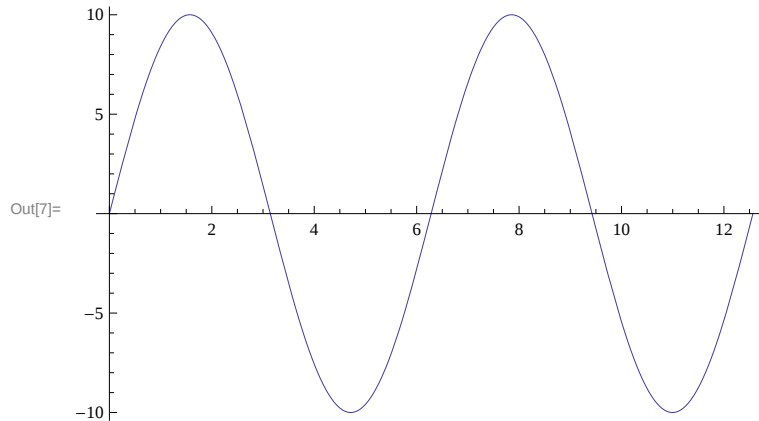
$$\text{Out[5]} = \frac{10 \sqrt{m} \sin\left[\frac{\sqrt{k} t}{\sqrt{m}}\right]}{\sqrt{k}}$$

Massa joutuu sinimuotoiseen värähtelyliikkeeseen. Piirretään kuvaaja sijoittamalla ensin arvot massalle ja jousivakiolle.

```
In[6]:= rata1 = liike /. {k -> 1, m -> 1}
```

```
Out[6]= 10 Sin[t]
```

```
In[7]:= Plot[rata1, {t, 0, 4 Pi}]
```



Tehdään animaatio värähtelylle. Seuraava koodi määrittelee kappaleen liikkeen animoinnissa tarvittavat työkalut. Kyseessä on Mathematicalla kirjoitettu ohjelmakoodi.

```
In[8]:= kappale[hor_, ver_, lev_, kork_] := {{GrayLevel[0.5],  

Rectangle[{hor - 0.5 * lev, ver - 0.5 * kork}, {hor + 0.5 * lev, ver + 0.5 * kork}]}];  

jousi[hor_, ala_, yla_, paa_, jaksot_, ampl_] :=  

Module[{jakso}, jakso = (yla - ala - 2 * paa) / jaksot;  

kierre = ParametricPlot[{hor + ampl * Sin[2 * Pi * t / jakso], t + ala + paa},  

{t, 0, jaksot * jakso}];  

{Line[{hor, ala}, {hor, ala + paa}], Line[{hor, yla}, {hor, yla - paa}]},  

kierre[[1]]];  

kuva[x1_, x2_, x3_, t0_, nro_] := Module[{x10 = x1 /. t -> t0,  

lepo1 = 50.0, a = 20.0, h = 10.0, s = 5.0, ampl = 3.0}, grafiikka =  

Graphics[{{GrayLevel[0.5], Rectangle[{-50, 0}, {50, 5}], Line[{-50, 0}, {50, 0}]},  

Text[Style[nro, 16, Bold, FontFamily -> "Helvetica"], {70, -5}],  

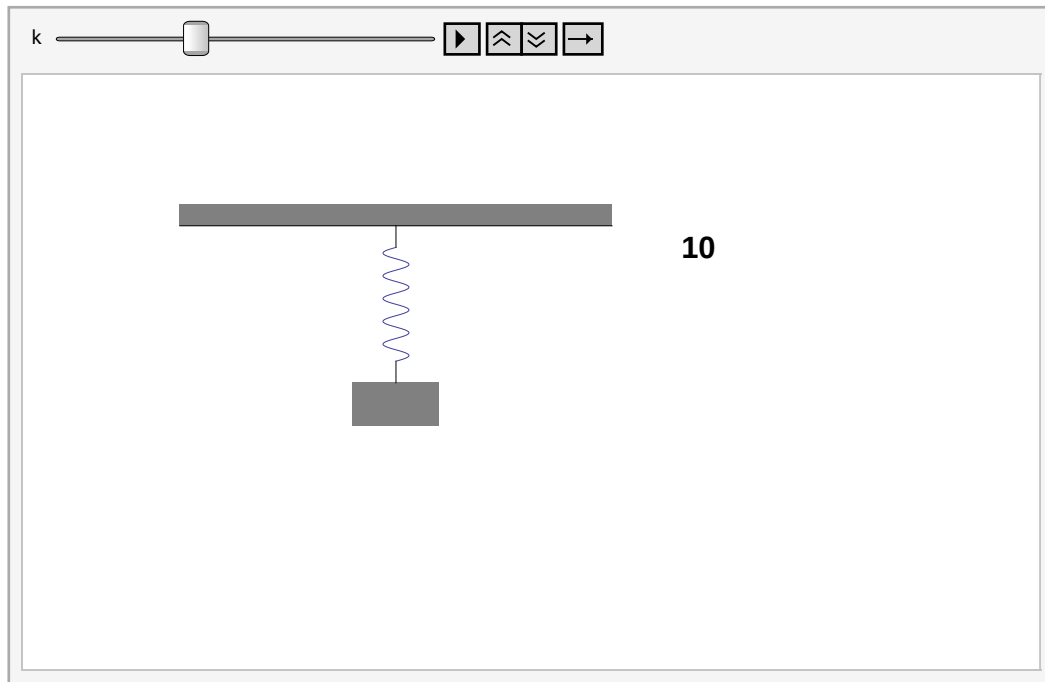
kappale[0, -lepo1 + x10, a, h], jousi[0, -lepo1 + x10 + h / 2, 0, s, 5, ampl]}];  

Show[grafiikka, AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> {{-80, 80}, {-80, 10}}];
```

Ja sitten animointi:

```
In[11]:= anim = Animate[kuva[rata1, 0, 0, N[k (2 Pi) / 30], ToString[k]],
  {k, 0, 29, 1}, SaveDefinitions -> True]
```

Out[11]=



Tehtävä

Tarkastele erisuuruisten massojen käyttäytymistä jousen varassa. Millä tavalla massan muuttaminen vaikuttaa syntyvään värähtelyyn? Entä jos muutetaan myös alkunopeutta siten, että värähtelyn energia pysyy vakiona?

JP & SKK 03.05.2001