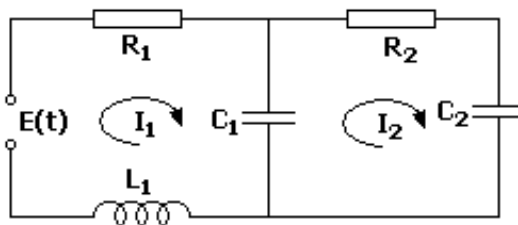


Monisilmukkainen vaihtovirtapiiri

Otetaan tarkastelun kohteeksi RLC-vaihtovirtapiiri jossa on käämejä, vastuksia ja kondensaattoreita.

Kytkeä 1

Tarkastellaan virtapiiriä, jossa yksinkertaiseen RLC-piiriin on kondensaattorin rinnalle kytketty piiri, jossa on vastus ja toinen kondensaattori. Alla kuva piirin kokoonpanosta.



Piirin komponentit kohdistavat jännitteeseen kolme erilaista pudotusta,

$$\begin{aligned} E_L &= L \frac{d I(t)}{d t} && \text{käämin yli,} \\ E_R &= R I && \text{vastuksen yli sekä} \\ E_C &= \frac{1}{C} \int I(t) dt && \text{kondensaattorin yli.} \end{aligned}$$

Lisäksi piiriin syötetään sinimuotoista vaihtovirtaa $E(t) = E_0 \sin(\omega t)$. Muodostetaan yllä olevalle piirille differentiaaliyhtälöt kiertämällä piiriä virtasilmukoiden I_1 ja I_2 muodostamia silmukoita myöden. Kirchhoffin lain mukaan molempien virtojen kulkiessa komponentin yli tapahtuu jännitteen muutos. Saadaan yhtälöt

$$\begin{aligned} R_1 I_1(t) + \frac{1}{C_1} \int (I_1(t) - I_2(t)) dt + L_1 \frac{d I_1(t)}{d t} &= E_0 \sin(\omega t), \\ \frac{1}{C_1} \int (I_2(t) - I_1(t)) dt + R_2 I_2(t) + \frac{1}{C_2} \int I_2(t) dt &= 0. \end{aligned}$$

Jotta integraalitermeistä päästään eroon, yhtälöt derivoidaan:

$$\begin{aligned} L_1 \frac{d^2 I_1(t)}{d t^2} + R_1 \frac{d I_1(t)}{d t} + \frac{1}{C_1} (I_1(t) - I_2(t)) &= E_0 \omega \cos(\omega t), \\ \frac{1}{C_1} (I_2(t) - I_1(t)) + R_2 \frac{d I_2(t)}{d t} + \frac{1}{C_2} I_2(t) &= 0. \end{aligned}$$

Tämä on differentiaaliyhtälöryhmä pakotetulle värähtelylle. Ratkaistaan yhtälöt ja siten virrat virtasilmukoissa 1 ja 2.

Laskujen aluksi on syytä hävittää mahdollisista aiemmista laskuista jääneet muuttujat:

Remove["Global`*"]

Määritellään yhtälöryhmä ja sen tuntemattomat.

```
ryhma = {L1 i1''[t] + R1 i1'[t] + (i1[t] - i2[t]) / C1 == E0 ω Cos[ω t],
  (i2[t] - i1[t]) / C1 + R2 i2'[t] + i2[t] / C2 == 0}

{ i1[t] - i2[t] / C1 + R1 i1'[t] + L1 i1''[t] == E0 ω Cos[t ω], i2[t] / C2 + (-i1[t] + i2[t]) / C1 + R2 i2'[t] == 0 }

tuntemattomat = {i1[t], i2[t]}

{i1[t], i2[t]}
```

Sijoitetaan vakioille arvot ja asetetaan alkuehto. Kytkevä lähde on verkkovirtalähde ja sitä ennen piirissä ei ollut virtaa.

```
ryhma1 =
  ryhma /. {L1 -> 0.1, R1 -> 5, C1 -> 0.001, R2 -> 3, C2 -> 0.0005, E0 -> 230, ω -> 2 Pi 50}

{1000. (i1[t] - i2[t]) + 5 i1'[t] + 0.1 i1''[t] == 23000 π Cos[100 π t],
  2000. i2[t] + 1000. (-i1[t] + i2[t]) + 3 i2'[t] == 0}

alkuehto = {i1[0] == 0, i1'[0] == 0, i2[0] == 0}

{i1[0] == 0, i1'[0] == 0, i2[0] == 0}
```

Ratkaistaan yhtälöryhmä numeerisin laskentamenetelmin ja sievennetään tulos.

```
rtk1 = NDSolve[Flatten[{ryhma1, alkuehto}], tuntemattomat, {t, 0, 1}, MaxSteps -> 3000]

NDSolve::mxst : Maximum number of 3000 steps reached at the point t == 0.6704464139414815`. More...

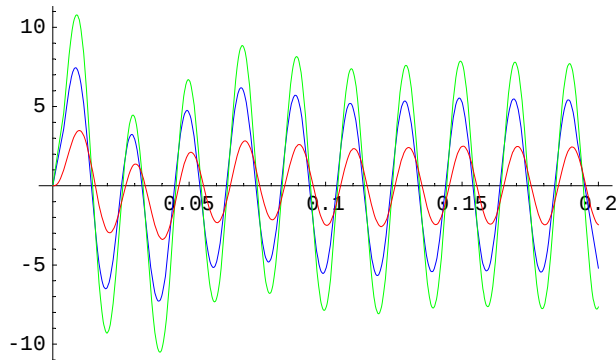
{{i1[t] -> InterpolatingFunction[{{0., 0.670446}}, <>][t],
  i2[t] -> InterpolatingFunction[{{0., 0.670446}}, <>][t]}}

virrat = tuntemattomat /. First[rtk1]

{InterpolatingFunction[{{0., 0.670446}}, <>][t],
  InterpolatingFunction[{{0., 0.670446}}, <>][t]}
```

Piirretään kuvaaja virralle piirin eri osissa. Sininen käyrä on jaetun kondensaattorin C_1 läpi kulkeva virta, vihreä käyrä on virtakierroksen 1 virta ja punainen virtakierroksen 2 virta.

```
Plot[Evaluate[{virrat[[1]] - virrat[[2]], virrat[[1]], virrat[[2]]},
{t, 0, .2}, PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[1, 0, 0]}]
```

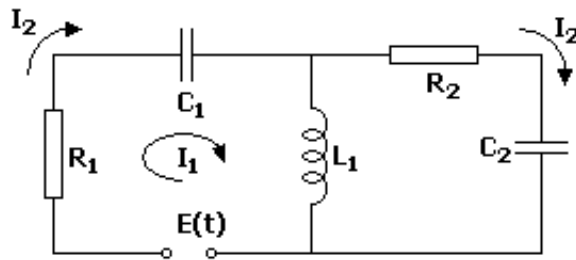


- Graphics -

Vaihtovirta näyttää jakautuvan hieman eri vaiheisena rinnakkaisten kondensaattorien kesken. Alkuehdon aikaansaama epävakaisuus näyttää vaimenevan varsin nopeasti.

KytKentä 2

Tarkastellaan seuraavaksi RLC-virtapiiriä, jossa käämin rinnalle on kytketty sama vastus ja kondensaattori kuin edellä. Alla kuva piirin kokoonpanosta.



Huomaa virtakierrosten valinta! Mathematican funktio `NDSolve` ei nimittäin suoriudu piirin laskemisesta, mikäli käämin läpi kulkee useiden virtojen summa. Tällöin ohjelma ei osaa löytää sopivia alkuarvoja. Pyrimme siis pitämään yhtälöryhmän kertaluvun mahdollisimman alhaalla virtakierrosvalinnoilla. Kirchhoffin lain perusteella saatavat yhtälöt ovat derivoitavissa muodossa

$$L_1 \frac{d^2 I_1(t)}{dt^2} + R_1 \frac{d(I_1(t) + I_2(t))}{dt} + \frac{1}{C_1} (I_1(t) + I_2(t)) = E_0 \omega \cos(\omega t),$$

$$R_1 \frac{d(I_1(t) + I_2(t))}{dt} + \frac{1}{C_1} (I_1(t) + I_2(t)) + R_2 \frac{dI_2(t)}{dt} + \frac{1}{C_2} I_2(t) = E_0 \omega \cos(\omega t).$$

Muodostetaan yhtälöryhmä ja tuntemattomat:

```

ryhma = {L1 i1'[t] + R1 (i1'[t] + i2'[t]) + (i1[t] + i2[t]) / C1 == E0 ω Cos[ω t],
  R1 (i1'[t] + i2'[t]) + (i1[t] + i2[t]) / C1 + R2 i2'[t] + i2[t] / C2 == E0 ω Cos[ω t]}

{
  (i1[t] + i2[t]) / C1 + R1 (i1'[t] + i2'[t]) + L1 i1''[t] == E0 ω Cos[t ω],
  (i2[t] / C2 + (i1[t] + i2[t]) / C1 + R2 i2'[t] + R1 (i1'[t] + i2'[t]) == E0 ω Cos[t ω]}

tuntemattomat = {i1[t], i2[t]}

{i1[t], i2[t]}

```

Muodostetaan alkuehto ja annetaan vakioille arvot. Kytkevä lähde on verkkovirtalähde ja sitä ennen piirissä ei ollut virtaa. Vakiot ovat samat kuin edellä.

```

ryhma2 =
  ryhma /. {L1 -> 0.1, R1 -> 5, C1 -> 0.001, R2 -> 3, C2 -> 0.0005, E0 -> 230, ω -> 2 Pi 50}

{1000. (i1[t] + i2[t]) + 5 (i1'[t] + i2'[t]) + 0.1 i1''[t] == 23000 π Cos[100 π t],
  2000. i2[t] + 1000. (i1[t] + i2[t]) + 3 i2'[t] + 5 (i1'[t] + i2'[t]) == 23000 π Cos[100 π t]}

alkuehto = {i1[0] == 0, i1'[0] == 0, i2[0] == 0}

{i1[0] == 0, i1'[0] == 0, i2[0] == 0}

```

Ratkaistaan yhtälöryhmä numeerisesti:

```

rtk2 = NDSolve[Flatten[{ryhma2, alkuehto}], tuntemattomat, {t, 0, .2}]

{{i1[t] -> InterpolatingFunction[{{0., 0.2}}, <>][t],
  i2[t] -> InterpolatingFunction[{{0., 0.2}}, <>][t]}}

```

Sievennetään saatu tulos.

```

virrat = Flatten[tuntemattomat /. rtk2]

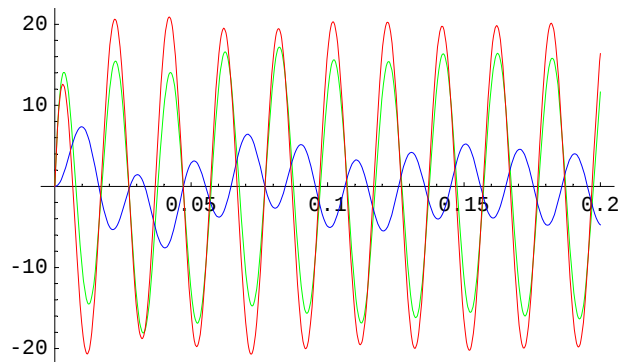
{InterpolatingFunction[{{0., 0.2}}, <>][t], InterpolatingFunction[{{0., 0.2}}, <>][t]}

```

Yhtälöryhmän ratkaiseminen DSolve-komennolla on myös mahdollista, mutta tämän sieventämisessä joudutaan helposti vaikeuksiin. Yhdistelmää //Chop//Simplify//ComplexExpand//Chop kannattaa tällöin kokeilla.

Piirretään kuvaaja virralle piirin eri osissa. Sininen käyrä on jaetun käämin L_1 läpi kulkeva virta, punainen virtakierroksen 2 virta ja vihreä on näiden summavirta..

```
Plot[Evaluate[{virrat[[1]] + virrat[[2]], virrat[[1]], virrat[[2]]},
{t, 0, .2}, PlotStyle -> {RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1], RGBColor[1, 0, 0]}]
```

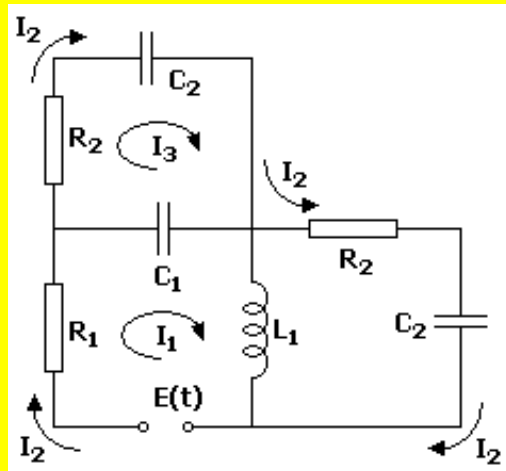


- Graphics -

Tuloksesta näkyy, miten käämi pyrkii vastustamaan virran muutosta ja sen läpi kulkeva virta on hyvin vähäinen. Vastaavasti se indusoi jopa primääripiiriä voimakkaamman värähtelyn lisäyspiiriin.

Tehtävä

Tarkastellaan vielä alla kuvattua piiriä, jossa on samanaikaisesti molemmat edellä tarkastellut lisäkytkennät.



Muodosta kolmen differentiaaliyhtälön ryhmä yllä esitetylle piirille. Käytä apuna kuvaan piirrettyjä virtakierroksia. Piirrä kuvaajat virran kululle eri komponenteissa. Vihje: Olet oikeilla jäljillä, mikäli virtakierron 3 värähtely on vastakaisvaiheista kiertojen 1 ja 2 kanssa.

Linkit

[vaihtovirtapiirin pakotettu värähtely](#) (virtap3.nb)
[epähomogeeninen vakiokertoiminen lineaariyhtälö](#)
[differentiaaliyhtälöryhmä](#)

JP & SKK 09.05.2001