

Radioaktiivinen hajoaminen

Radioaktiivinen hajoaminen on ilmiö, jossa aktivoitunut, epästabiili atomiydin vapauttaa energiaansa α -, β - tai γ -säteilyn kautta. Hiukkassäteilyn eli α - ja β -säteilyn tapauksessa samalla muuttuu myös atomiytimen sisäinen kokoonpano. Tällaisen hajoamisen kautta alkuaine muuttuu toiseksi.

Erityisen paljon tutkittuja ovat ydinreaktorien polttoainesauvoihin jäävien radioaktiivisten aineiden hajoamisketjut. Polttoainesauvoista muodostuva pitkään radioaktiivinen jäte aiheuttaa huolestumista, koska sauvoissa olevien radioaktiivisten aineiden hajoaminen on niin hidasta, että säteilyongelma säilyy luonnollisen hajoamisen kautta akuuttina vuosituhansia. Tässä esimerkissä tarkastelemme radiumin Ra^{228} hajoamista sekä yksinkertaistettua radium Ra^{224} ytimen hajoamisketjua lyijyksi Pb^{208} . Tämä ketju muodostaa loppuosan varsin tärkeästä Th^{232} hajoamisketjusta.

Jokaiselle radioaktiiviselle atomiytimelle on olemassa tietty todennäköisyys sen hajoamiseen määrätyllä aikavälillä. Hajoamisen kautta syntyvien tytäratomien lukumäärä on siten suoraan verrannollinen aktiivisten atomiytimien lukumäärään. Niinpä voidaan määrittää radioaktiivinen hajoamislaki

$$\frac{\partial}{\partial t} N = -\lambda N,$$

missä N on radioaktiivisten ytimien lukumäärä, t on aika ja λ radioaktiivinen hajoamisvakio, joka määrittää todennäköisyyden atomiytimen spontaanille hajoamiselle annetulla ajanhetkellä.

Hajoamislain perusteella voidaan määrittää ns. puoliintumisaika $T_{1/2}$, joka ilmoittaa sen aikayksikön, jossa puolet alkuperäisistä ytimistä on hajonnut. Integroimalla saadaan hajoamattomien ytimien lukumäärälle

$$N = N_0 e^{(\lambda t)},$$

jossa N_0 on ydinten lukumäärä ajanhetkellä $t = 0$. Ratkaisemalla $N = \frac{1}{2} N_0$ saadaan

puoliintumisajalle $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$. Tällöin hajoamislaille pätee

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{\ln 2}{T_{1/2}} N.$$

Yksinkertainen hajoamistilanne

Radium Ra^{228} on yksi väliydin pitkäaktiivisen Th^{232} :n hajoamisketjussa. Ra^{228} :n puoliintumisaika on 5,75 vuotta kun se hajoaa lyhytaktiiviseksi Ac^{228} -yttimeksi. Lasketaan kuinka paljon 100 kg:sta Ra^{228} :sta on jäljellä 70 vuoden kuluttua.

Laskujen aluksi on syytä hävittää mahdollisista aiemmista laskuista jääneet muuttujat.

```
> restart;
```

Ytimien hajoamista kuvaava differentiaaliyhtälö.

```
> yht:= diff(n(t), t)=-lambda*n(t);
```

$$yht := \frac{d}{dt} n(t) = -\lambda n(t)$$

Alkuehdon määrittää tilanne, jossa on vain Ra^{228} ytimiä. Lasketaan ainemäärä suoraan kilogrammoissa.

```
> alkuehto:= n(0)=100;
```

$$alkuehto := n(0) = 100$$

Ratkaistaan differentiaaliyhtälö.

```
> rtk:= dsolve({yht, alkuehto}, n(t));
```

$$rtk := n(t) = 100 e^{(-\lambda t)}$$

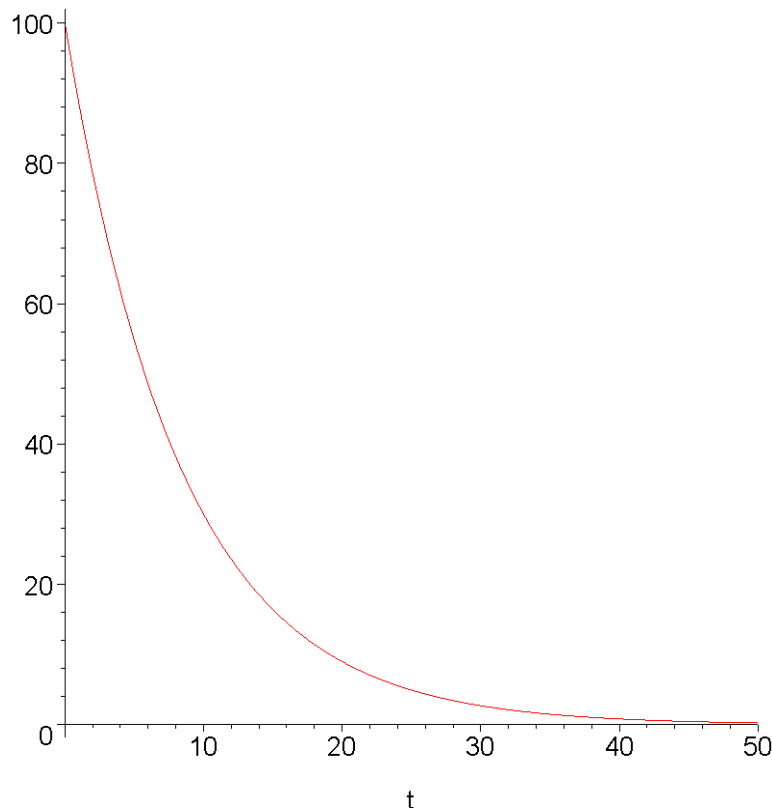
Sijoitetaan hajoamisvakio. Käytetään aikayksikkönä vuosia.

```
> ainemaara:= subs(lambda=log(2)/5.75, rhs(rtk));
```

$$ainemaara := 100 e^{(-0.1739130435 \ln(2) t)}$$

Piirretään kuvaaja ainemäärän kehitykselle ajan fuktiona 50 vuoden aikajaksolla.

```
> plot(ainemaara, t=0..50);
```



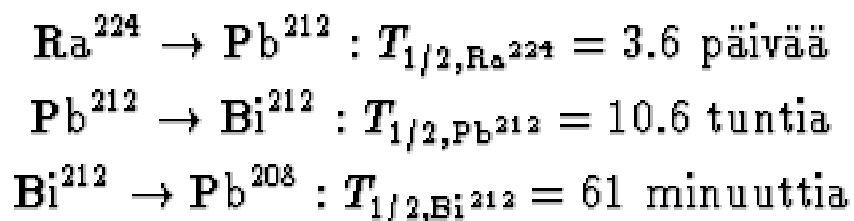
70 vuoden jälkeen jäljelle jääneen ainemäärän paino kilogrammoissa selviää sijoittamalla ajaksi 70 vuotta.

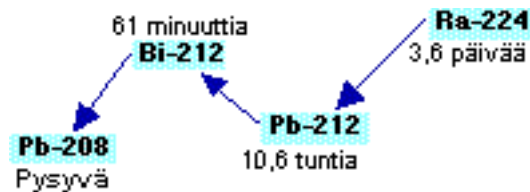
```
> jaljella:= subs(t=70, ainemaara):
    evalf(%)
0.02164148261
```

Tuloksena on siis 21,6 grammaa Radium Ra^{228} :aa.

Hajoamisketju

Myös Radium Ra^{224} on väliydin Th^{232} :n hajoamisketjussa. Hajoamisketju Ra^{224} ytimestä eteenpäin sisältää useita lyhytaikaisia ja muutamia pitkäaikaisia väliytimiä ennen hajoamista pysyväksi lyijy-ytimeksi Pb^{208} . Tarkastelemme nyt hajoamista väliytimet Pb^{212} ja Bi^{212} huomioiden. Puoliintumisajat ytimien hajoamisille ovat seuraavat:





Muodostetaan hajoamisketjua kuvaavat differentiaaliyhtälöt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} N_1 &= -\lambda_1 N_1 \\ \frac{\partial}{\partial t} N_2 &= \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \\ \frac{\partial}{\partial t} N_3 &= \lambda_2 N_2 - \lambda_3 N_3 \\ \frac{\partial}{\partial t} N_4 &= \lambda_3 N_3\end{aligned}$$

jossa N_1 on Ra^{224} -atomien lukumäärä ja λ_1 vastaavasti Ra^{224} :n hajoamisvakio. Vastaavasti alaindeksi '2' viittaa Pb^{212} :n, '3' Bi^{212} :n ja '4' Pb^{208} :n vastaaviin suureisiin. Ratkaistaan hajoamisketjun differentiaaliyhtälöryhmä ja piirretään kuvaaja ytimien lukumäärille ajan suhteen.

Ytimien hajoamisia ja toisikseen muuttumista kuvaa seuraava normaaliryhmä.

```
> ryhma1:= diff(n[1](t), t)=-lambda[1]*n[1](t), diff(n[2](t),
t)=lambda[1]*n[1](t)-lambda[2]*n[2](t), diff(n[3](t),
t)=lambda[2]*n[2](t)-lambda[3]*n[3](t), diff(n[4](t),
t)=lambda[3]*n[3](t);
```

$$\text{ryhma1} := \frac{d}{dt} n_1(t) = -\lambda_1 n_1(t), \frac{d}{dt} n_2(t) = \lambda_1 n_1(t) - \lambda_2 n_2(t), \frac{d}{dt} n_3(t) = \lambda_2 n_2(t) - \lambda_3 n_3(t),$$

$$\frac{d}{dt} n_4(t) = \lambda_3 n_3(t)$$

Ongelman tuntemattomat funktiot ovat ketjun eri alkuaineiden ydinten lukumäärät.

```
> tuntemattomat1:= {n[1](t), n[2](t), n[3](t), n[4](t)};
tuntemattomat1 := {n1(t), n2(t), n3(t), n4(t)}
```

Alkuehdon määrittää tilanne, jossa on 10^{16} kpl Ra^{224} ytimiä (n. $3.72 \times 10^{(-6)}$ g):

```
> alkuehto1:= n[1](0)=10^16, n[2](0)=0, n[3](0)=0, n[4](0)=0;
alkuehto1 := n1(0) = 10000000000000000, n2(0) = 0, n3(0) = 0, n4(0) = 0
```

Ratkaistaan differentiaaliyhtälöryhmä ja sievennetään tulokset:

```
> rtk1:= dsolve({ryhma1, alkuehto1}, tuntemattomat1):
simplify(%);
```

$$\left\{ \begin{aligned} n_1(t) &= 10000000000000000 e^{(-\lambda_1 t)}, n_4(t) = - \left(\frac{10000000000000000 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(-\lambda_3 + \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)} \int_0^t \right. \\ &\quad \left(-\lambda_1 + \lambda_1 e^{(-(\lambda_2 - \lambda_3)z1)} - e^{(-(-\lambda_3 + \lambda_1)z1)} \lambda_2 + \lambda_2 - e^{(-(\lambda_2 - \lambda_3)z1)} \lambda_3 + e^{(-(-\lambda_3 + \lambda_1)z1)} \lambda_3 \right) \\ &\quad \left. e^{(-\lambda_3 z1)} dz1 \right), n_2(t) = - \frac{10000000000000000 \lambda_1 (e^{(-t(\lambda_1 - \lambda_2))} - 1) e^{(-\lambda_2 t)}}{\lambda_1 - \lambda_2}, n_3(t) = - \\ &\quad \frac{10000000000000000 \lambda_1 \lambda_2}{(-\lambda_1 + \lambda_1 e^{(-t(\lambda_2 - \lambda_3))} + \lambda_2 - \lambda_2 e^{(-t(-\lambda_3 + \lambda_1))} + e^{(-t(-\lambda_3 + \lambda_1))} \lambda_3 - e^{(-t(\lambda_2 - \lambda_3))} \lambda_3) e^{(-\lambda_3 t)} / (} \\ &\quad \left. (\lambda_1 - \lambda_2)(-\lambda_3 + \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)) \right\} \end{aligned} \right.$$

```
> maarat1:= subs(rtk1, [n[1](t), n[2](t), n[3](t), n[4](t)]):
```

Määritellään hajoamisvakiot:

```
> lambda[1]:= log(2)/3.6;
lambda[2]:= log(2)/(10.6/24);
lambda[3]:= log(2)/(61/60/24);
```

$$\lambda_1 := 0.2777777778 \ln(2)$$

$$\lambda_2 := 2.264150943 \ln(2)$$

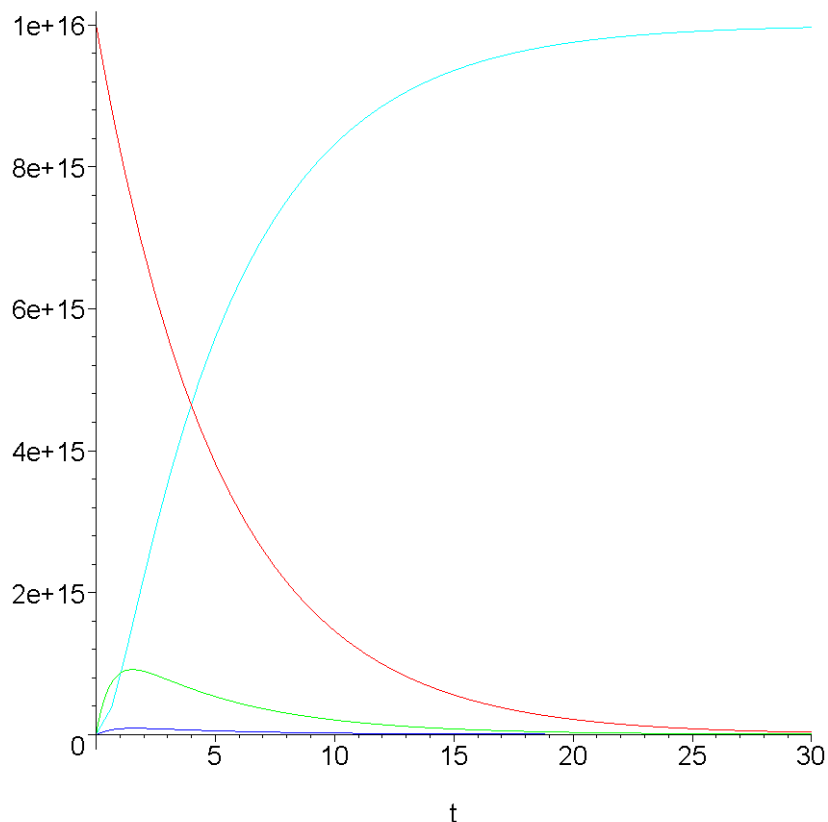
$$\lambda_3 := \frac{1440}{61} \ln(2)$$

Piirretään kuva ainemäärien muuttumisesta ajan funktiona. Tarkasteltavana aikavälinä käytetään yhtä kuukautta.

```
> with(plots):
```

Warning, the name changecoords has been redefined

```
> display(plot(maat1[1], t=0..30, color=red), plot(maat1[2],
t=0..30, color=green), plot(maat1[3], t=0..30, color=blue),
plot(maat1[4], t=0..30, color=cyan));
```



>

Lähtöytimien Ra^{224} (punainen) hajoamisessa syntyy ensin vihreällä merkittyjä Pb^{212} ytimiä jotka nopeasti hajoavat sinisellä merkityiksi Bi^{212} ytimiksi. Niiden puoliintumisaika on kuitenkin niin lyhyt, että ne hajoavat hyvin nopeasti Pb^{208} ytimiksi. Jo viidentoista päivän kuluttua lähtöhetkestä on jäljellä lähinnä vain vakaita turkoosilla piirrettyjä Pb^{208} ytimiä. Eniten niiden syntymistä hidastaa lähtöytimien verrattain lyhyt puoliintumisaika.

Tehtävä

Testaa puoliintumisaajan vaikutusta radioaktiivisessa hajoamisessa. Mikäli puolitat Ra^{228} :n puoliintumisaajan, kuinka paljon vähemmän ytimiä on jäljellä 4 puoliintumisaajan jälkeen verrattuna todelliseen tilanteeseen?

Mikäli haluat tutustua tarkemmin radioaktiivisiin [hajoamisketjuihin](#), voit tutustua niihin Internetissä [Uranium Information Centren](#) kotisivuilla Australiassa.

Linkit

radiohiiliajoitus (radahaj1.mws)
 differentiaaliyhtälöryhmä
 vakiokertoiminen homogeeniyhtälö