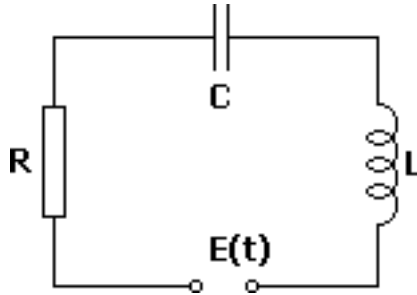


RCL-vaihtovirtapiiri: pakotettu värähtely

Tässä esimerkissä tarkastellaan tavallista RLC-vaihtovirtapiiriä. Piirissä on kolme komponenttia, R ohmin vastus, L henryn induktanssi ja C faradin kapasitanssi.



Piiriin syötettyyn jännitteeseen kohdistuu kolme eri pudotusta,

$$\begin{aligned} E_L &= L \left(\frac{d}{dt} I(t) \right) && \text{käämin yli,} \\ E_R &= R I(t) && \text{vastuksen yli sekä} \\ E_C &= \frac{1}{C} \int I(t) dt && \text{kondensaattorin yli.} \end{aligned}$$

Näiden summasta syntyy piirin Kirchhoffin lain mukainen sähkömotorinen voima $E(t)$. Mikäli piiriin syötetty jännite on sinimuotoista vaihtovirtaa $E(t) = E_0 \sin(\omega t)$, saadaan piirille yhtälö

$$E(t) = L \left(\frac{d}{dt} I(t) \right) + R I(t) + \frac{1}{C} \int I(t) dt = E_0 \sin(\omega t),$$

Integraalitermistä päästään eroon derivoimalla yhtälö ajan suhteen:

$$L \left(\frac{d^2}{dt^2} I(t) \right) + R \left(\frac{d}{dt} I(t) \right) + \frac{1}{C} I(t) = E_0 \omega \cos(\omega t).$$

Tämä on differentiaaliyhtälö pakotetulle värähtelylle, jossa ulkoinen pakottava jännite on sinimuotoinen amplitudina E_0 .

Syötetään piiriin yhtälö alkuehtoineen. Aluksi on syytä hävittää mahdollisista aiemmista laskuista jääneet muuttujat:

```
> restart;
```

Differentiaaliyhtälö:

```
> yhtalo:= L*diff(i(t), t$2)+R*diff(i(t),  
t)+i(t)/C=E[0]*omega*cos(omega*t);
```

$$yhtalo := L \left(\frac{d^2}{dt^2} i(t) \right) + R \left(\frac{d}{dt} i(t) \right) + \frac{i(t)}{C} = E_0 \omega \cos(\omega t)$$

Ongelman tuntematon:

```
> tuntematon := i(t);
```

$$tuntematon := i(t)$$

Tarkastellaan tilannetta, missä piirissä ei kulje tarkastelun alkuhetkellä virtaa. Annetaan tätä vastaava alkuehto:

```
> alkuehto := i(0)=0, D(i)(0)=0;
```

$$alkuehto := i(0) = 0, D(i)(0) = 0$$

Vaimentamaton piiri

Piiri on vaimentamaaton, jos sen vastus on $R = 0$. Asetetaan yhtälöön tämänmukaiset alkuarvot; olkoon $L = 0.1$ H, $C = 1$ μ F, $E_0 = 230$ V, $\omega = 50 \times 2\pi$ 1/s.

```
> yhtalo1 := subs({L=0.1, R=0, C=0.001, E[0]=230, omega=50*2*Pi},  
yhtalo);
```

$$yhtalo1 := 0.1 \left(\frac{d^2}{dt^2} i(t) \right) + 1000. i(t) = 23000 \pi \cos(100 \pi t)$$

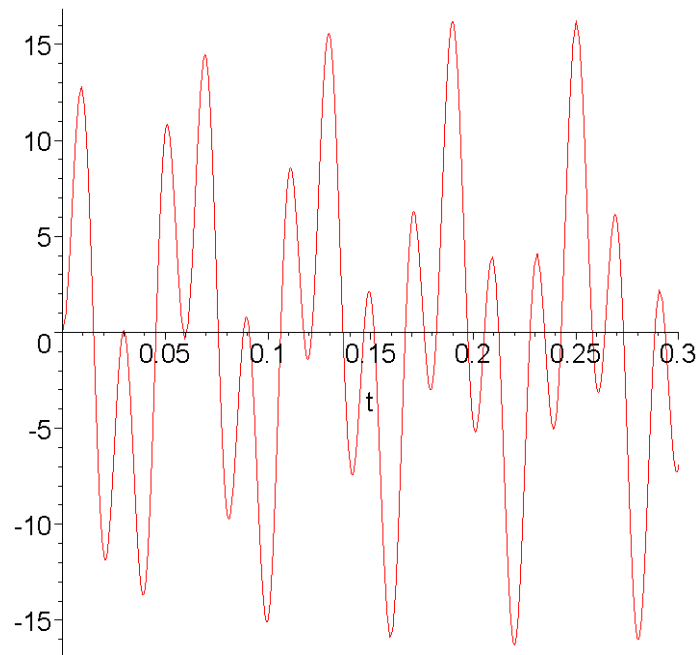
Ratkaistaan yhtälöryhmä.

```
> dsolve({yhtalo1, alkuehto}, tuntematon):  
virta1 := subs(%, i(t)):  
simplify(%);
```

$$-\frac{23 \pi (-\cos(100 t) + \cos(100 \pi t))}{-1 + \pi^2}$$

Virta näyttää muodostuvan kahden eritaajuisen kosinimuotoisen termin summasta. Toinen näistä aiheutuu piirin sisäisistä värähtelyominaisuuksista, toinen piiriin syötetystä ulkoisesta jännitteestä. Piirissä syntyvän virran kuvaaja:

```
> plot(virta1, t=0..0.3);
```



Virta ei vaimene. Tämä värähtely on siis vaimentamattoman piirin vaste syöttöjännitteelle.

Vaimennettu piiri

Seuraavaksi lasketaan piirin käyttäytyminen silloin, kun siinä on 3Ω vastus.

```
> yhtalo2:= subs({L=0.1, R=3, C=0.001, E[0]=230, omega=50*2*Pi},
yhtalo);
```

$$yhtalo2 := 0.1 \left(\frac{d^2}{dt^2} i(t) \right) + 3 \left(\frac{d}{dt} i(t) \right) + 1000. i(t) = 23000 \pi \cos(100 \pi t)$$

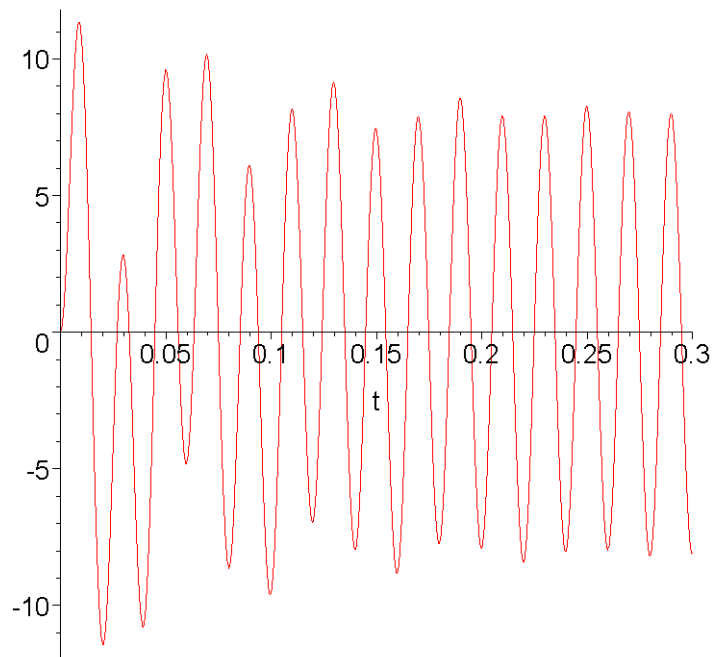
Ratkaistaan yhtälöryhmä.

```
> dsolve({yhtalo2, alkuehto}, tuntematon):
virta2:= subs(%, i(t)):
simplify(%);
```

$$\begin{aligned} & -\frac{10}{17} \pi (30 e^{(-15 t)} \sin(5 \sqrt{391} t) \sqrt{391} \pi^2 + 30 e^{(-15 t)} \sin(5 \sqrt{391} t) \sqrt{391} \\ & + 3910 e^{(-15 t)} \cos(5 \sqrt{391} t) - 3910 e^{(-15 t)} \cos(5 \sqrt{391} t) \pi^2 - 3910 \cos(100 \pi t) \\ & - 1173 \sin(100 \pi t) \pi + 3910 \pi^2 \cos(100 \pi t)) / (100 - 191 \pi^2 + 100 \pi^4) \end{aligned}$$

Ratkaisussa on jälleen kahden eri taajuuden termejä: Piirin sisäisistä ominaisuuksista johtuvien termien edessä on eksponentiaalinen vaimennuskerroin. Tämän takia kyseinen taajuus vähitellen kuolee pois. Virran kuvaaja:

```
> plot(virta2, t=0..0.3);
```



>

Kuva osoittaa, että vaikka vastus jatkuvasti kuluttaakin virtatehoa hukkaan lämpönä, virtalähde syöttää piiriin energiaa, joka ylläpitää värähtelyä.

Tehtäviä

Muuta tehtävän alkuehtoa sekä vaimentamattomassa että vaimennetussa tapauksessa. Miten tämä vaikuttaa piirin värähtelyyn?

Vaihdetaan piiriin käämi, jonka induktanssi on vain yksi kymmenesosa aikaisemmasta, 0.01 H. Tarkastele piirin käytöstä uudella käämillä, vastuksen kanssa ja ilman. Käytä kuvissa aiempaa pidempää aikaväliä. Vertaa saamiasi tuloksia aikaisempiin tuloksiin. Miten selität piirin käytöksen?

Linkit

[vaihtovirtapiiriin vapaa värähtely](#) (virtap2.mws)

[vaihtovirtapiiriin resonanssi](#) (virtap4.mws)

[monisilmukainen vaihtovirtapiiri](#) (virtap5.mws)

[epähomogeeninen vakiokertoimen lineaariyhtälö](#)

JP & SKK & MS 12.07.2001