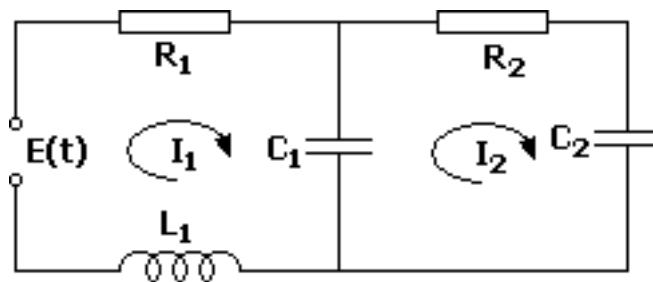


Monisilmukainen vaihtovirtapiiri

Otetaan tarkastelun kohteeksi RLC-vaihtovirtapiiri jossa on käämejä, vastuksia ja kondensaattoreita.

Kytcentä 1

Tarkastellaan virtapiiriä, jossa yksinkertaiseen RLC-piiriin on kondensaattorin rinnalle kytketty piiri, jossa on vastus ja toinen kondensaattori. Alla kuva piirin kokoonpanosta.



Piirin komponentit kohdistavat jännitteeseen kolme erilaista pudotusta,

$$\begin{aligned} E_L &= L \left(\frac{d}{dt} I(t) \right) \text{ käämin yli,} \\ E_R &= R I(t) \text{ vastuksen yli sekä} \\ E_C &= \frac{1}{C} \int I(t) dt \text{ kondensaattorin yli.} \end{aligned}$$

Lisäksi piiriin syötetään sinimuotoista vaihtovirtaa $E(t) = E_0 \sin(\omega t)$. Muodostetaan yllä olevalle piirille differentiaaliyhtälöt kiertämällä piiriä virtasilmukoiden I_1 ja I_2 muodostamia silmukoita myöden. Kirchhoffin lain mukaan molempien virtojen kulkiessa komponentin yli tapahtuu jännitteen muutos. Saadaan yhtälöt

$$\begin{aligned} R_1 I_1(t) + \frac{1}{C_1} \int I_1(t) - I_2(t) dt + L_1 \left(\frac{d}{dt} I_1(t) \right) &= E_0 \sin(\omega t), \\ \frac{1}{C_1} \int I_2(t) - I_1(t) dt + R_2 I_2(t) + \frac{1}{C_2} \int I_2(t) dt &= 0. \end{aligned}$$

Jotta integraalitermeistä päästään eroon, yhtälöt derivoidaan:

$$L_1 \left(\frac{d^2}{dt^2} I_1(t) \right) + R_1 \left(\frac{d}{dt} I_1(t) \right) + \frac{I_1(t) - I_2(t)}{C_1} = E_0 \omega \cos(\omega t),$$

$$\frac{I_2(t) - I_1(t)}{C_1} + R_2 \left(\frac{d}{dt} I_2(t) \right) + \frac{I_2(t)}{C_2} = 0.$$

Tämä on differentiaaliyhtälöryhmä pakotetulle värähtelylle. Ratkaistaan yhtälöt ja siten virrat virtasilmukoissa 1 ja 2.

Laskujen aluksi on syytä hävittää mahdollisista aiemmista laskuista jääneet muuttujat:

> restart;

Määritellään yhtälöryhmä ja sen tuntemattomat.

> ryhma := L[1]*diff(i[1](t), t\$2)+R[1]*diff(i[1](t), t)+(i[1](t)-i[2](t))/C[1]=E[0]*omega*cos(omega*t), i[2](t)/C[2]+(-i[1](t)+i[2](t))/C[1]+R[2]*diff(i[2](t), t)=0;

$$ryhma := L_1 \left(\frac{d^2}{dt^2} i_1(t) \right) + R_1 \left(\frac{d}{dt} i_1(t) \right) + \frac{i_1(t) - i_2(t)}{C_1} = E_0 \omega \cos(\omega t),$$

$$\frac{i_2(t)}{C_2} + \frac{-i_1(t) + i_2(t)}{C_1} + R_2 \left(\frac{d}{dt} i_2(t) \right) = 0$$

> tuntemattomat := {i[1](t), i[2](t)};

$$tuntemattomat := \{i_1(t), i_2(t)\}$$

Sijoitetaan vakioille arvot ja asetetaan alkuehto. Kytkettävä lähde on verkkovirtalähde ja sitä ennen piirissä ei ollut virtaa.

> ryhma1 := subs({L[1]=0.1, R[1]=5, C[1]=0.001, R[2]=3, C[2]=0.0005, E[0]=230, omega=2*Pi*50}, {ryhma});

$$ryhma1 := \{ 3000.000000 i_2(t) - 1000. i_1(t) + 3 \left(\frac{d}{dt} i_2(t) \right) = 0,$$

$$0.1 \left(\frac{d^2}{dt^2} i_1(t) \right) + 5 \left(\frac{d}{dt} i_1(t) \right) + 1000. i_1(t) - 1000. i_2(t) = 23000 \pi \cos(100 \pi t) \}$$

> alkuehto := i[1](0)=0, D(i[1])(0)=0, i[2](0)=0;

$$alkuehto := i_1(0) = 0, D(i_1)(0) = 0, i_2(0) = 0$$

Ratkaistaan yhtälöryhmä numeerisin laskentamenetelmin.

> rtk := dsolve({ryhma1[], alkuehto}, tuntemattomat, type=numeric, output=listprocedure);

$$rtk := \left[t = (\text{proc}(t) \dots \text{end proc}), i_1(t) = (\text{proc}(t) \dots \text{end proc}), \right.$$

$$\left. \frac{d}{dt} i_1(t) = (\text{proc}(t) \dots \text{end proc}), i_2(t) = (\text{proc}(t) \dots \text{end proc}) \right]$$

Poimitaan ratkaisusta virtaa kuvaavat termit.

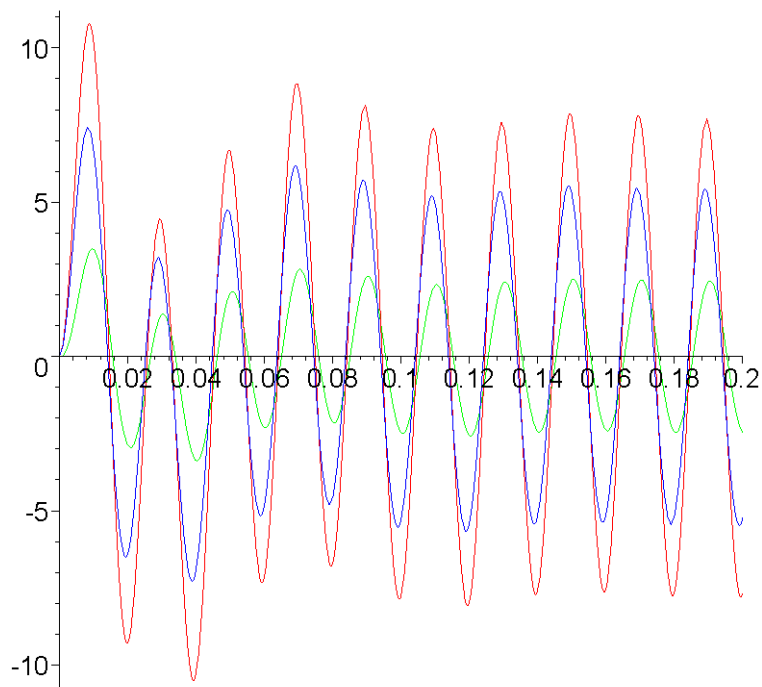
```
> virrat:= subs(rtk, [i[1](t), i[2](t)]):
```

Piirretään kuvaaja virralle piirin eri osissa. Sininen käyrä on jaetun kondensaattorin C_1 läpi kulkeva virta, punainen käyrä on virtakierroksen 1 virta ja vihreä virtakierroksen 2 virta.

```
> with(plots):
```

Warning, the name changecoords has been redefined

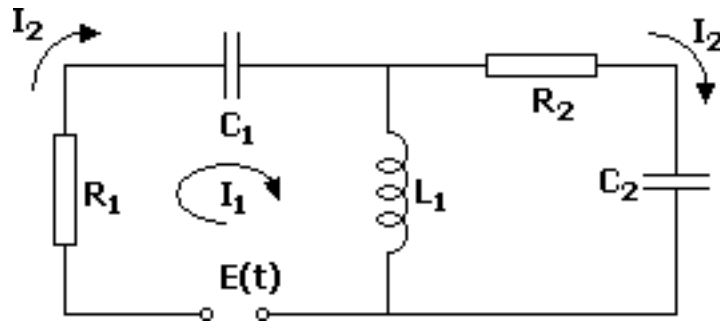
```
> display(plot(virrat[1]-virrat[2], 0..0.2, color=blue),  
plot(virrat[1], 0..0.2, color=red),  
plot(virrat[2], 0..0.2, color=green));
```



Vaihtovirta näyttää jakautuvan hieman eri vaiheisena rinnakkaisten kondensaattorien kesken. Alkuehdon aikaansaama epävakaisuus näyttää vaimenevan varsin nopeasti.

KytKentä 2

Tarkastellaan seuraavaksi RLC-virtapiiriä, jossa käämin rinnalle on kytketty sama vastus ja kondensaattori kuin edellä. Alla kuva piirin kokoonpanosta.



Huomaa virtakierrosten valinta! Pyrimme pitämään laskennan helpottamiseksi yhtälöryhmän kertaluvun mahdollisimman alhaalla virtakierrosvalinnoilla. Kirchhoffin lain perusteella saatavat yhtälöt ovat derivoidussa muodossa.

$$L_1 \left(\frac{d^2}{dt^2} I(t) \right) + R_1 \left(\frac{d}{dt} (I_1(t) + I_2(t)) \right) + \frac{I_1(t) + I_2(t)}{C_1} = E_0 \omega \cos(\omega t),$$

$$R_1 \left(\frac{d}{dt} (I_1(t) + I_2(t)) \right) + \frac{I_1(t) + I_2(t)}{C_1} + R_2 \left(\frac{d}{dt} I_2(t) \right) + \frac{I_2(t)}{C_2} = E_0 \omega \cos(\omega t).$$

Muodostetaan yhtälöryhmä ja tuntemattomat:

```
> ryhmä:= L[1]*diff(i[1](t), t$2)+R[1]*(diff(i[1](t),
t))+diff(i[2](t),
t))+(i[1](t)+i[2](t))/C[1]=E[0]*omega*cos(omega*t),
R[1]*(diff(i[2](t), t)+diff(i[2](t),
t))+(i[1](t)+i[2](t))/C[1]+R[2]*diff(i[2](t),
t)+i[2](t)/C[2]=E[0]*omega*cos(omega*t);
```

$$ryhmä := L_1 \left(\frac{d^2}{dt^2} i_1(t) \right) + R_1 \left(\left(\frac{d}{dt} i_1(t) \right) + \left(\frac{d}{dt} i_2(t) \right) \right) + \frac{i_1(t) + i_2(t)}{C_1} = E_0 \omega \cos(\omega t),$$

$$2 R_1 \left(\frac{d}{dt} i_2(t) \right) + \frac{i_1(t) + i_2(t)}{C_1} + R_2 \left(\frac{d}{dt} i_2(t) \right) + \frac{i_2(t)}{C_2} = E_0 \omega \cos(\omega t)$$

```
> tuntemattomat2:= {i[1](t), j[2](t)};
tuntemattomat2 := {j_2(t), i_1(t)}
```

Muodostetaan alkuehto ja annetaan vakioille arvot. Kytkevä lähde on verkkovirtalähde ja sitä ennen piirissä ei ollut virtaa. Vakiot ovat samat kuin edellä.

```
> ryhmä2:= subs({L[1]=0.1, R[1]=5, C[1]=0.001, R[2]=3,
C[2]=0.0005, E[0]=230, omega=2*Pi*50}, {ryhmä});
```

```
ryhmä2 := {
0.1 \left( \frac{d^2}{dt^2} i_1(t) \right) + 5 \left( \frac{d}{dt} i_1(t) \right) + 5 \left( \frac{d}{dt} i_2(t) \right) + 1000. i_1(t) + 1000. i_2(t) = 23000 \pi \cos(100 \pi t),
13 \left( \frac{d}{dt} i_2(t) \right) + 1000. i_1(t) + 3000.000000 i_2(t) = 23000 \pi \cos(100 \pi t) }
```

```
> alkuehto:= i[1](0)=0, D(i[1])(0)=0, i[2](0)=0;
      alkuehto := i1(0) = 0, D(i1)(0) = 0, i2(0) = 0
```

Ratkaistaan yhtälöryhmä numeerisesti.

```
> rtk2:= dsolve({ryhma2[], alkuehto}, tuntemattomat, type=numeric,
      output=listprocedure);
```

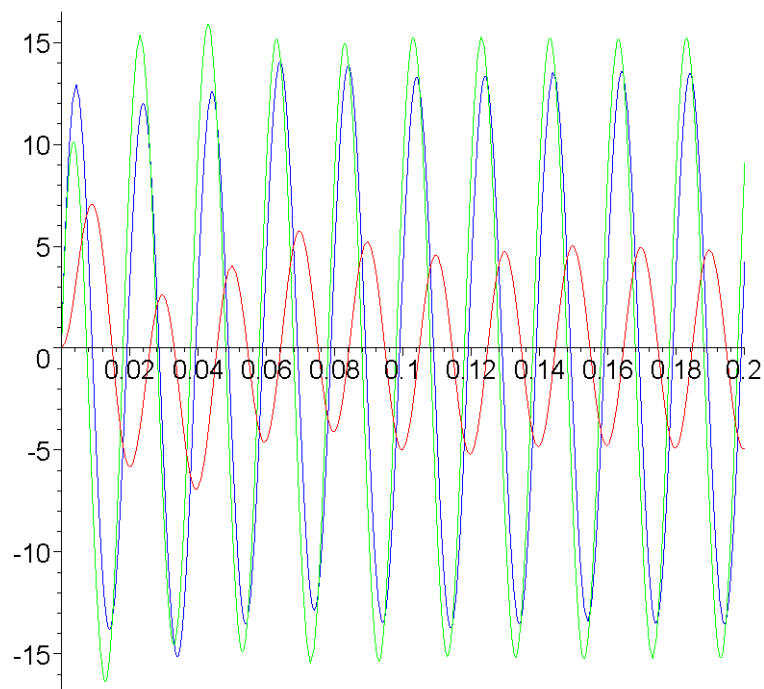
```
rtk2 := [ t = (proc(t) ... end proc), i1(t) = (proc(t) ... end proc),
       $\frac{d}{dt}i_1(t) = (\text{proc}(t) \dots \text{end proc}), i_2(t) = (\text{proc}(t) \dots \text{end proc}) ]$ 
```

```
> virrat:= subs(rtk2, [i[1](t), i[2](t)]):
```

Yhtälöryhmän ratkaiseminen **dsolve**-komennolla symbolisesti on myös mahdollista, mutta tämän on hyvin hidasta ja sieventämisessä joudutaan helposti vaikeuksiin.

Piirretään kuvaaja virralle piirin eri osissa. Punainen käyrä on jaetun käämin L_1 läpi kulkeva virta, vihreä virtakierroksen 2 virta ja sininen on näiden summavirta.

```
> display(plot(virrat[1], 0..0.2, color=red),
      plot(virrat[2], 0..0.2, color=green),
      plot(virrat[1]+virrat[2], 0..0.2, color=blue));
```

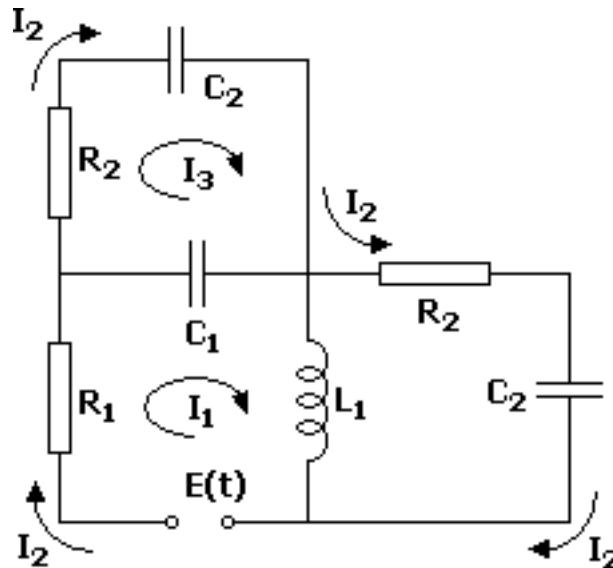


```
>
```

Tuloksesta näkyy, miten käämi pyrkii vastustamaan virran muutosta ja sen läpi kulkeva virta on hyvin vähäinen. Vastaavasti se indusoi jopa primääripiiriä voimakkaamman värähtelyn lisäyspiiriin.

Tehtävä

Tarkastellaan vielä alla kuvattua piiriä, jossa on samanaikaisesti molemmat edellä tarkastellut lisäytkennät.



Muodosta kolmen differentiaaliyhtälön ryhmä yllä esitetylle piirille. Käytä apuna kuvaan piirrettyjä virtakierroksia. Piirrä kuvaajat virran kululle eri komponenteissa. Vihje: Olet oikeilla jäljillä, mikäli virtakierron 3 värähtely on vastakkaisvaiheista kiertojen 1 ja 2 kanssa.

Linkit

[vaihtovirtapiirin pakotettu värähtely \(virtap3.mws\)](#)
[epähomogeeninen vakiokertoiminen lineaariyhtälö](#)
[differentiaaliyhtälöryhmä](#)