ESITIEDOT: ■ määrätty integraali
KATSO MYÖS: ■ integroimistekniikkaa, ■ pinta-aloja ja tilavuuksia

---

Tasoalueen pinta-ala

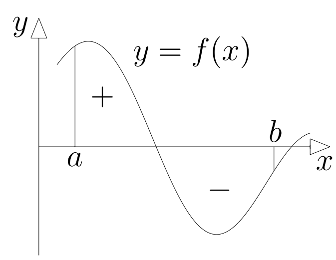
Jos funktio f saa välillä $[a, b]$ vain ei-negatiivisia arvoja, so. $f(x) \geq 0$, kun $x \in [a, b]$, voidaan kuvaajan $y = f(x)$, x-akselin ja suorien $x = a$, $x = b$ rajaaman alueen pinta-ala laskea suoraan integraalista $\int_a^b f(x)\,dx$.

■ funktio (reaali-)
■ väli (reaaliakselin)

Jos välillä $[a, b]$ on $f(x) \leq 0$, antaa integraali vastaavan pinta-alan negatiivisena.

■ kuvaaja
■ pinta-ala
■ määrätty integraali

Jos funktio vaihtaa merkkiään välillä $[a, b]$, ottaa integraali x-akselin ylä- ja alapuolella olevien alueiden alat huomioon positiivisina ja negatiivisina kuvan osoittamalla tavalla. Jos kaikkien osa-alueiden alat halutaan positiivisina, on väli $[a, b]$ jaettava osiin funktion f nollakohdissa, laskettava erikseen integraali jokaisen osavälin yli ja tuloksia yhteenlaskettaessa otettava osaintegraalien merkit huomioon.



Usein on yksinkertaisinta ajatella, että laskettava ala jaetaan kapeisiin pystysuoriin suorakulmioihin ja summeerataan näiden pinta-alat positiivisina. Tällöin saadaan Riemannin summa, joka jakoa tihennettäessä, so. suorakulmioita kavennettaessa johtaa määrättyyn integraaliin. Tämä ajattelu toimii myös, kun laskettavana on kahden käyrän väliin jäävä ala.

■ Riemannin summa
■ käyrä (taso-)

ESITIEDOT: ■ määrätty integraali
KATSO MYÖS: ■ integroimistekniikkaa, ■ pinta-aloja ja tilavuuksia

---

Esimerkki pinta-alan laskemisesta

Olkoon laskettavana sen segmentin ala, joka jää paraabelin $y = ax^2$ ja suoran $y = kx + b$ väliin. Tällöin oletetaan, että vakiot a, k ja b ovat siten valitut, että suora todella on paraabelin sekantti; oletetaan lisäksi, että paraabeli aukeaa ylöspäin, ts. $a > 0$.

■ segmentti
■ paraabeli (xy-koordinaateissa)
■ suora (yhtälö)
■ sekantti (suora)
■ yhtälöryhmä

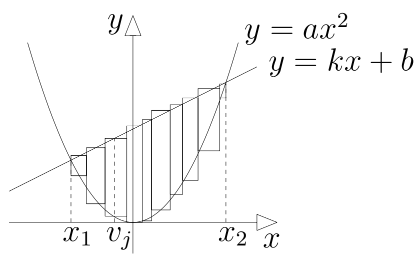
Ratkaisemalla yhtälöryhmä

$$\begin{cases} y = ax^2 \\ y = kx + b \end{cases}$$

saadaan paraabelin ja suoran leikkauspisteiden x-koordinaateiksi

$$x_1 = \frac{k - \sqrt{k^2 + 4ab}}{2a}, \quad x_2 = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4ab}}{2a}.$$

Tässä $x_1 < x_2$.



Koska segmentti sijaitsee välillä $[x_1, x_2]$ ja tällä välillä suora on paraabelia ylempänä, on kohdassa $x = v_j$ sijaitsevan suorakulmion korkeus $kv_j + b - av_j^2$ ja kanta Δx_j, mikä johtaa alaa approksimoivaan Riemannin summaan $\sum_{j=1}^{n}(kv_j + b - av_j^2)\Delta x_j$. Jakoa tihennettäessä tämä lähestyy integraalia

■ väli (reaaliakselin)
■ Riemannin summa
■ määrätty integraali

$$\int_{x_1}^{x_2} (kx + b - ax^2)\, dx.$$

Integraalin laskeminen antaa pinta-alaksi

$$\frac{(k^2 + 4ab)^{3/2}}{6a^2}.$$

Tulos on pätevä myös, jos $a < 0$. Riemannin summassa tosin suorakulmion korkeus $kv_j + b - av_j^2$ on tällöin negatiivinen, mutta tästä aiheutuva merkkivirhe kumoutuu siinä, että rajojen x_1 ja x_2 suuruusjärjestys muuttuu päinvastaiseksi, kun $a < 0$.

■ integrointi (kaavat)
■ integrointi (kaavat)
■ integrointi (sijoitus)
■ integrointi (osittais-)

■ Sisältö
■ Hakemisto

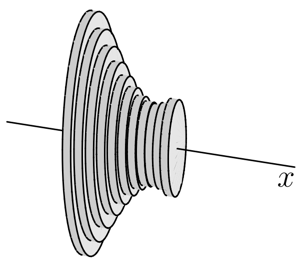
Tilavuuden laskeminen

Olkoon tarkasteltavana kappale, jonka läpi x-akseli kulkee. Jaetaan tämä ohuisiin viipaleisiin x-akselia vastaan kohtisuorilla tasoilla. Olkoon kappaleen tasoleikkauksen pinta-ala $A(v_j)$, kun leikkaava taso on kohdassa $x = v_j$. Jos tässä kohdassa olevan viipaleen paksuus on Δx_j, on viipaleen tilavuus $A(v_j)\Delta x_j$. Koko kappaleen tilavuutta approksimoi Riemannin summa $\sum_{j=1}^{n} A(v_j)\Delta x_j$, missä summeeraus ulotetaan kaikkiin viipaleisiin. Viipaleita ohennettaessa tämä johtaa kappaleen tilavuutta esittävään määrättyyn integraaliin

■ Riemannin summa
■ määrätty integraali

$$\int_{x_1}^{x_2} A(x)\, dx,$$

missä x_1 ja x_2 ovat kappaleen äärimmäisten pisteiden x-koordinaatit.



Yleensä x-akseli mielletään vaakasuoraksi. Edellä olevassa tarkastelussa akselin ei välttämättä tarvitse olla vaakasuora, vaan aivan yhtä hyvin kelpaa minkä suuntainen akseli tahansa, kunhan akselia vastaan kohtisuorien tasoleikkausten pinta-ala on laskettavissa.

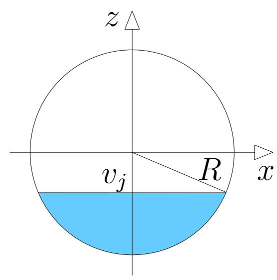
■ Sisältö
■ Hakemisto

Esimerkki tilavuuden laskemisesta

Pallonmuotoisen öljysäiliön säde on R ja säiliössä on öljyä korkeuteen h saakka; $0 \leq h \leq 2R$. Mikä on öljyn tilavuus?

Sijoitetaan kolmiulotteinen xyz-koordinaatisto siten, että origo on pallonmuotoisen säiliön keskipisteessä. Symmetria-akseliksi valitaan pystysuora z-akseli.

■ pallo
■ koordinaatisto (xyz-)



Korkeudella $z = v_j$ oleva vaakasuora tasoleikkaus on tällöin ympyrä, jonka säde on Pythagoraan mukaan $\sqrt{R^2 - v_j^2}$. Tasoleikkauksen ala on siten $A(v_j) = \pi(R^2 - v_j^2)$. Vaakasuoran öljyviipaleen tilavuutta esittää tällöin lauseke $A(v_j)\Delta z_j$ ja koko öljymäärää Riemannin summa $\sum_{j=1}^{n} A(v_j)\Delta z_j$, missä summeerataan kaikki öljykerrokset huomioon ottaen.

Öljymäärä sijaitsee säiliössä alueella, missä z-koordinaatit ovat välillä $[-R, h - R]$. (Jos $h = 0$, saadaan vain säiliön alin piste $z = -R$; jos $h = 2R$, on öljyä välillä $[-R, R]$, so. koko pallossa.) Riemannin summaa vastaa tällöin integraali

$$\int_{-R}^{h-R} \pi(R^2 - z^2)\, dz,$$

mikä antaa öljytilavuudeksi

$$\frac{\pi}{3} h^2(3R - h).$$

Jos erityisesti $h = 2R$, saadaan pallon tilavuus $\frac{4}{3}\pi R^3$.

■ ympyrä
■ Pythagoraan lause
■ Riemannin summa
■ väli (reaaliakselin)
■ määrätty integraali
■ integrointi (kaavat)
■ integrointi (kaavat)
■ integrointi (sijoitus)
■ integrointi (osittais-)
■ pallo (tilavuus)

ESITIEDOT: ■ määrätty integraali
KATSO MYÖS: ■ integroimistekniikkaa, ■ pinta-aloja ja tilavuuksia

---

Pyörähdyspinnan ala

Pyörähtäköön käyrä $y = f(x)$, $x_1 \leq x \leq x_2$, x-akselin ympäri, jolloin syntyy *pyörähdyspinta*.

Tämän pinta-ala voidaan laskea jakamalla pinta ympyränmuotoisiin suikaleisiin x-akselia vastaan kohtisuorilla tasoilla. Jokainen suikale on likimain katkaistu kartio. Tämän ala on $\pi(r_1 + r_2)s$, missä r_1 ja r_2 ovat ala- ja yläpohjan säteet sekä s sivujanan pituus.

Jos leikkaustasot sijaitsevat kohdissa $x = x_j$, ovat pohjien säteet $f(x_{j-1})$ ja $f(x_j)$. Sivujanan pituus on Pythagoraan mukaan

$$\begin{aligned}&\sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (f(x_j) - f(x_{j-1}))^2}\\&\quad\approx \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + f'(x_{j-1})^2(x_j - x_{j-1})^2} = \sqrt{1 + f'(x_{j-1})^2}\Delta x_j,\end{aligned}$$

missä on käytetty differentiaalikehitelmää ja merkintää $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$.

Summeeraamalla suikaleiden pinta-alat saadaan

$$\sum_{j=1}^{n} \pi(f(x_{j-1}) + f(x_j))\sqrt{1 + f'(x_{j-1})^2}\Delta x_j.$$

Tämä ei ole Riemannin summa (koska funktioiden arvoja on laskettu sekä pisteessä x_{j-1} että pisteessä x_j), mutta voidaan kuitenkin osoittaa, että jakoa tihennettäessä päädytään integraaliin

$$\int_{x_1}^{x_2} 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx,$$

joka siis esittää pyörähdyspinnan alaa.

■ käyrä (taso-)
■ pinta
■ pinta-ala
■ kartio (katkaistu)
■ pinta-ala (pintojen)
■ pinta-ala (pintojen)
■ pohja (katkaistun kartion)
■ sivujana (kartion)
■ Pythagoraan lause
■ differentiaalikehitelmä
■ Riemannin summa
■ määrätty integraali

■ Sisältö
■ Hakemisto

Esimerkki pyörähdyspinnan alan laskemisesta

Pallopinta syntyy ympyränkaaren $y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ pyörähtäessä x-akselin ympäri välillä $[-R, R]$. Koska

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}},$$

saadaan pyörähdyspinnan alaksi

$$\int_{-R}^{R} 2\pi\sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\,dx = \int_{-R}^{R} 2\pi R\,dx = 4\pi R^2.$$

Myös pallon tilavuus voidaan laskea sen pinta-alan perusteella. Pallo jaetaan tällöin samankeskisiksi pallokuoriksi, joiden paksuus on Δr_j. Kuoren tilavuus on tällöin likimain $4\pi r_j^2 \Delta r_j$, jolloin pallon tilavuutta approksimoi Riemannin summa $\sum_{k=1}^{n} 4\pi r_j^2 \Delta r_j$. Pallon tilavuus saadaan siis integraalista:

$$\int_0^R 4\pi r^2\,dr = \tfrac{4}{3}\pi R^3.$$

Lasku on samanlainen kuin ympyrän alan laskeminen kehän pituuden perusteella. Ei siis myöskään ole sattuma, että pallon pinta-ala on tilavuuden derivaatta!

■ pallo
■ pallo (tilavuus)
■ pallo (ala)
■ tilavuus
■ Riemannin summa
■ määrätty integraali
■ ympyrän ala (integroimalla)
■ ympyrän ala (integroimalla)